

**Государственный Университет по Землеустройст-  
ву**

**Кафедра высшей математики и физики**

**Сборник заданий по физике**

**Москва**

**2007**

УДК 51  
ББК 74.58  
П 78

Рецензент - д.ф.-м.н., проф. Н.П. Калашников  
(МГИУ)

### СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ФИЗИКЕ

Для студентов дневного и заочного отделения

В.И. Ляшенко, В.В. Максименко, И.С. Пулькин, И.А. Соловьев, Б.Ш. Галямов - М.: ГУЗ, 2007 – 157 с.

Государственный университет по землеустройству, 2007.

В.И. Ляшенко, В.В. Максименко, И.С. Пулькин, И.А. Соловьев, Б.Ш. Галямов

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие является сборником типовых заданий, предназначенным для студентов дневного и заочного отделений ГУЗа. Предлагаемые задачи охватывают основные разделы курса общей физики, исключая элементы квантовой механики. Все разделы сборника снабжены кратким теоретическим введением и разбором характерных задач.

Учитывая небольшой объем тех задач, которые студентам предлагается выполнить в течение семестра, мы старались там, где это оказалось возможным, подобрать задачи методической направленности, каждая из которых одновременно охватывает несколько разнородных разделов физики.

Количество и номера выполняемых каждым студентом задач устанавливаются преподавателями в начале семестра.

Выполнение заданий студентами предполагает консультации с преподавателями, ведущими лабораторный практикум по физике. Для студентов-заочников в конце пособия приведен список учебной литературы, в которой можно найти указания к решению многих из предлагаемых в сборнике задач.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Кинематика	5
2. Динамика	14
3. Законы сохранения импульса и энергии	24
4. Динамика вращательного движения твердого тела	34
5. Колебания и волны	42
6. Механика жидкости и газа	52
7. Основы молекулярно-кинетической теории газа	58
8. Элементы статистической физики и явления переноса в газах	66
9. Термодинамика идеального газа	74
10. Приложения молекулярно-кинетической теории и термодинамики	87
11. Электростатика	97
12. Электрический ток	107
13. Магнитное поле	122
14. Геометрическая оптика	131
15. Волновая и квантовая оптика	143
16. Элементы специальной теории относительности. Атомная физика. Строение ядра. Радиоактивность.	151

# 1. КИНЕМАТИКА

## 1.1. Основные понятия

*Кинематика* — раздел механики, изучающий движение без рассмотрения причин, вызывающих движение.

*Механическое движение* — изменение с течением времени положения тела в пространстве относительно других тел.

*Тело отсчета* — тело, относительно которого рассматриваются положения других тел в пространстве.

*Система отсчета* — система координат, связанная с телом отсчета, и выбранный метод отсчета времени.

*Материальная точка* — тело, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

*(Абсолютно) твердое тело* — тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается постоянным при его движении. Понятия материальной точки и абсолютно твердого тела позволяют исключить из рассмотрения деформацию тела при его движении.

*Поступательное движение* — движение, при котором отрезок прямой, соединяющий любые две точки твердого тела, перемещается параллельно самому себе. При поступательном движении все точки тела движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями.

*Вращательное движение* — движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Эти окружности лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

*Радиус-вектор  $r$*  — вектор, проведенный из начала системы координат в интересующую нас точку пространства. Положение материальной точки в пространстве может быть задано ее радиус-вектором.

*Траектория* — линия, описываемая движущейся материальной точкой в пространстве.

*Путь* — длина участка траектории от начального до конечного положения материальной точки.

*Перемещение* (приращение радиуса вектора) — вектор  $\Delta r$ , соединяющий начальную и конечную точки участка траектории, пройденного за промежуток времени  $\Delta t$ . Приращение  $\Delta a$  скалярной физической величины  $a$  за промежуток времени

$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$  есть разность между значениями этой величины в конечный ( $t_2$ ) и начальный ( $t_1$ ) момент времени

$$\Delta a = a(t_2) - a(t_1) = a_2 - a_1.$$

Приращение скалярной величины есть величина алгебраическая: оно может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Аналогично вводится приращение векторной физической величины

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t_2) - \mathbf{a}(t_1) = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1.$$

*Скорость* — физическая величина, характеризующая как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Средняя скорость  $\langle \mathbf{v} \rangle$  определяется как

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Средняя скорость прохождения пути  $\langle v_s \rangle$  (средняя путевая скорость) равна отношению пути  $\Delta S$ , пройденному телом за промежуток времени  $\Delta t$ , к этому промежутку времени:

$$\langle v_s \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

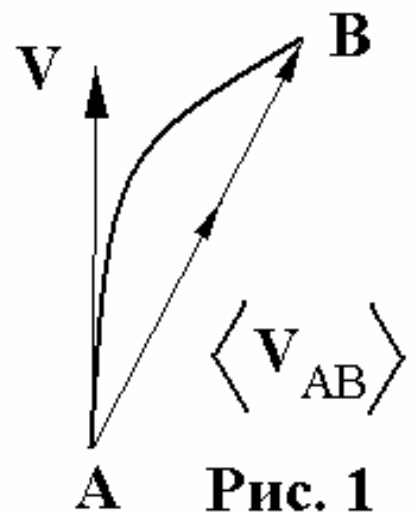
Мгновенная скорость является векторной величиной, равной первой производной по времени от радиус-вектора движущейся точки

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Мгновенная скорость  $\mathbf{v}$  направлена по касательной к траектории (рис. 1), средняя скорость  $\langle \mathbf{v}_{AB} \rangle$  направлена вдоль секущей  $AB$ . Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , то в пределе точки  $A$  и  $B$  сольются в одну точку  $A$  и секущая превратится в касательную.

*Ускорение* - физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Мгновенное ускорение — векторная величина, определяемая первой производной



**Рис. 1**

скорости по времени:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right).$$

При движении с постоянной скоростью  $\mathbf{v} = const$  (не путать с равнономерным движением  $v = |\mathbf{v}| = const$ ):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0),$$

где  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ . При  $t_0 = 0$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t.$$

При движении с постоянным ускорением  $\mathbf{a} = const$  при  $t_0 = 0$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t,$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}.$$

Вектор ускорения материальной точки или выделенной точки твердого тела (в этом случае его называют полным ускорением) удобно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 2).

Тангенциальное ускорение  $\mathbf{a}_\tau$  характеризует изменение модуля скорости и направлено по касательной к траектории  $a_\tau = dv/dt$ .

Нормальное ускорение  $\mathbf{a}_n$  характеризует изменение скорости по направлению и перпендикулярно вектору скорости.

Любой, достаточно малый участок плавной (без изломов) траектории, можно аппроксимировать (приблизительно представить) дугой окружности. При малой длине рассматриваемого участка траектории величина скорости на нем остается практически постоянной, и движение тела представляет собой равномерное движение по окружности, т.е. тело движется с нормальным или центростремительным ускорением, направленным к центру окружности и равным по величине

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

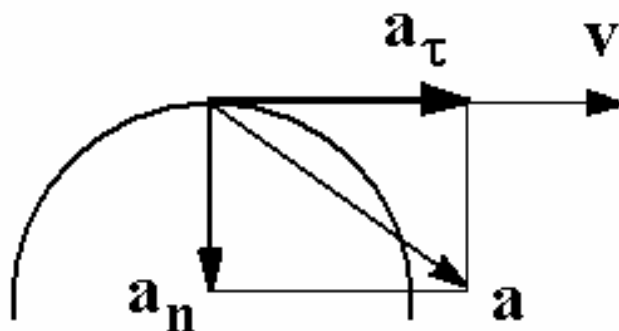


Рис. 2

где  $R$  - радиус окружности, используемой для аппроксимации траектории в данной точке, и называемый радиусом кривизны траектории.

В некоторых задачах движение тел одновременно рассматривается по отношению к различным системам отсчета. Если скорости много меньше скорости света в вакууме, то справедлив закон сложения скоростей:

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_\Pi + \mathbf{v}_0.$$

Скорость  $\mathbf{v}_H$  движения материальной точки по отношению к системе отсчета, принимаемой за неподвижную, равна векторной сумме скоростей движения точки в подвижной системе  $\mathbf{v}_\Pi$  и скорости движения подвижной системы относительно неподвижной  $\mathbf{v}_0$ . Аналогично выглядит соотношение и для ускорений:

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_\Pi + \mathbf{a}_0.$$

Здесь  $\mathbf{a}_H$  и  $\mathbf{a}_\Pi$  — ускорения материальной точки по отношению к неподвижной и подвижной системам соответственно, а  $\mathbf{a}_0$  — ускорение подвижной системы относительно неподвижной.

При решении ряда задач удобно пользоваться принципом (взаимной) независимости движений. В применении к твердому телу этот принцип позволяет рассматривать движение любой точки твердого тела как сумму двух простейших движений: поступательного и вращательного. В частности, при плоском движении, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях, скорость произвольной точки твердого тела  $\mathbf{v}_T$  можно представить как

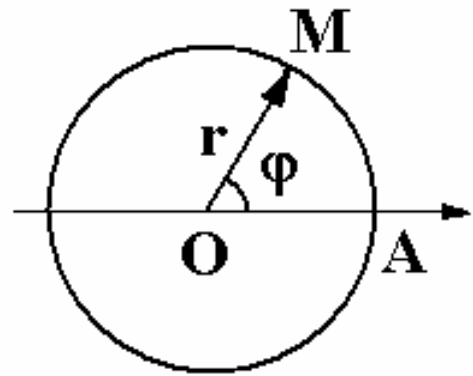
$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_{вр} + \mathbf{v}_{пост},$$

где  $\mathbf{v}_{пост}$  — скорость поступательного движения, т.е. скорость выбранной оси, относительно которой рассматривается вращательное движение;  $\mathbf{v}_{вр}$  — линейная скорость точки, обусловленная вращением твердого тела относительно выбранной оси.

Часто удобно рассматривать вращательное движение тел относительно оси, проходящей через точки, для которых  $\mathbf{v}_T=0$ . Эту ось называют мгновенной осью вращения. В этом случае движение тела можно рассматривать как чисто вращательное.



Пусть выбранная точка  $M$  твердого тела, совершающего вращательное движение, движется по окружности радиусом  $R$ . Проведем ось  $OA$  в плоскости окружности через ее центр  $O$ , выбранный в качестве начала координат, и отложим радиус-вектор  $\vec{r} = \vec{OM}$  (рис. 3). Положение точки  $M$  на окружности определяется значением угла  $\varphi$  (измеренного в радианах) между осью  $OA$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ . По определению центральный угол, ному радиану, стягивает дугу длиной, равной радиусу окружности.



**Рис. 3**

Угловая скорость (вращения) определяется как

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость всех точек твердого тела, совершающего вращательное движение, одинакова, таким образом, угловая скорость характеризует движение твердого тела в целом. Величина скорости (в этом случае ее принято называть линейной скоростью), с которой выбранная точка  $M$  тела движется по окружности, связана с угловой скоростью соотношением:

$$v = \omega R,$$

а ее нормальное ускорение можно выразить как

$$a_n = \omega^2 R.$$

## 1.2. ЗАДАЧИ

1. Лодка держит курс под углом  $\alpha = 60^\circ$  к берегу, но движется под углом  $\beta = 45^\circ$  к берегу. Скорость течения реки  $v = 0,5$  м/с. Определить скорость лодки относительно воды.
2. Ветер дует с северо-запада. Приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью  $u$ , показывают, что скорость ветра равна  $v$ . Какова скорость ветра, измеренная на берегу?
3. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки через интервал времени  $t_0 = 2$  с. Начальная скорость обоих тел

- одинакова и равна  $v_0=20$  м/с. На какой высоте  $h$  от поверхности земли тела встретятся?
4. Тело бросают вертикально вверх со скоростью  $v_0=10$  м/с. Одновременно с предельной высоты, которой оно может достичь, бросают вниз другое тело с той же начальной скоростью. Определить время, по истечению которого тела встретятся.
  5. Тело, имея начальную скорость  $v_0=1$  м/с, двигалось равноускоренно и приобрело, пройдя некоторое расстояние, скорость  $v_k=7$  м/с. Какова была скорость тела  $v_{1/2}$  на половине этого расстояния.
  6. Мяч брошен вертикально вверх. На высоте  $h=10$  м он побывал дважды с интервалом времени  $\Delta t = 4$  с. Определить начальную скорость  $v_0$  бросания мяча.
  7. Ракета стартует и движется вертикально вверх с ускорением  $a = 2g$ . Через  $t_0 = 20$  с полета двигатель отключается. Через какое время после старта ракета упадет на землю?
  8. С поверхности Земли вертикально вверх бросают два мяча. Наибольшая высота подъема одного из них оказалась в 3 раза больше другого. Во сколько раз отличается у них продолжительность полета? Сопротивление воздуха мало.
  9. Тело брошено со скоростью  $v_0 = 15$  м/с вертикально вверх с высоты  $H = 20$  м над поверхностью земли, на которую затем падает. Определить среднюю величину скорости тела за время падения.
  10. Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$ . Через сколько времени нужно бросить вверх второй мяч со скоростью  $v_0/2$ , чтобы они встретились в наикратчайшее время?
  11. Мяч, брошенный под углом к горизонту, упруго ударившись о стенку, удаленную от игрока на  $S=15$  м, через  $t=0,5$  с упал в  $L=0,5$  м от стенки. Начальная скорость мяча  $v_0 = 20$  м/с. Определить время полета, максимальную высоту броска, угол бросания.
  12. Небольшой мяч бросили между двумя гладкими параллельными стенками со скоростью  $v_0 = 8$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Горизонтальная составляющая скорости мяча перпендикулярна стенкам. Сколько раз мяч ударится о стенки до того, как вернется на прежнюю высоту? Расстояние между стенками  $l = 1$  м, удары абсолютно упругие.

13. Винт аэросаней вращается с угловой скоростью  $\omega = 360 \text{ рад/с}$ . Скорость поступательного движения аэросаней  $v = 60 \text{ м/с}$ . С какой скоростью движется один из концов винта, если радиус винта  $R = 1 \text{ м}$ ?
14. Диск радиуса  $R = 10 \text{ см}$ , находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным ускорением  $\varepsilon = 0,5 \text{ рад/с}^2$ . Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.
15. Две параллельные рейки движутся в одном направлении со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Между рейками зажат диск радиуса  $R$ . Проскальзывания между диском и рейками нет. Каковы угловая скорость вращения диска и скорость его центра?
16. Колесо радиусом  $R$  равномерно катится по горизонтальной поверхности. От точки  $A$  колеса отрывается капля грязи (рис. 4). С какой минимальной скоростью должно двигаться колесо, если капля, побывав в воздухе, снова опустилась на то же самое место?
17. Точка движется по окружности радиусом  $R = 0,2 \text{ м}$  с постоянным тангенциальным ускорением  $a = 5 \text{ см/с}^2$ . Через какое время  $t$  после начала движения нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному?
18. Тело брошено с башни горизонтально с начальной скоростью  $V = 6,0 \text{ м/с}$ . Определить нормальное и тангенциальное ускорения через  $t = 0,8 \text{ с}$  после начала движения.



**Рис. 4**

*В следующих двух задачах законы кинематики целесообразно дополнить законом сохранения импульса*

19. На поверхности воды плавает доска длиной  $L$  и массой  $M$ . На одном краю доски сидит лягушка массы  $m$ . С какой скоростью и под каким углом к горизонту должна прыгнуть лягушка, чтобы попасть точно на противоположный конец доски. Силой сопротивления воды пренебречь.
20. Аэростат массой  $M$  неподвижно висит над землей на высоте  $H$ . Какой минимальной длины  $L$  веревочной лестницей следует запастись человеку массой  $m$ , чтобы спуститься с аэростата на землю?

### 1.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** *Скорость течения реки  $u$ , скорость катера относительно воды  $v$ . Под каким углом к берегу должен двигаться катер, чтобы: а) пересечь реку за минимальное время? б) пересечь реку по кратчайшему пути?*

Скорость катера относительно берега  $w$  складывается из скорости течения  $u$  и скорости катера относительно воды  $v$

$$w = u + v.$$

Введем систему координат показанную на рис. 5. Уравнения движения катера

$$y(t) = v \sin \alpha \cdot t,$$

$$x(t) = (u + v \cos \alpha)t.$$

Пусть  $L$  - ширина реки,  $S$  - снос лодки течением,  $\tau$  - время, за которое катер пересекает реку. Тогда

$$L = v \sin \alpha \cdot \tau, \tag{1}$$

$$S = (u + v \cos \alpha)\tau. \tag{2}$$

Время  $\tau = L/(v \sin \alpha)$  минимально, если  $\sin \alpha = 1$ , т.е.  $\alpha = \pi/2$ .

Исключив  $\tau$  из уравнений (1)-(2) имеем

$$S = \frac{L(u + v \cos \alpha)}{v \sin \alpha}.$$

Кратчайшему пути соответствует нулевой снос, поэтому искомый угол определяется следующим выражением

$$\cos \alpha = -\frac{u}{v}.$$

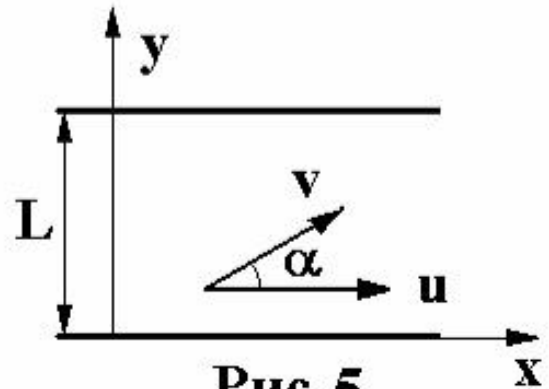


Рис. 5

**Пример 2.** Тело бросили со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Каковы будут нормальное и тангенциальное ускорения тела через время  $t$  после начала движения? Через сколько времени  $t_0$  нормальное ускорение будет максимальным? Каков радиус кривизны траектории в верхней точке?

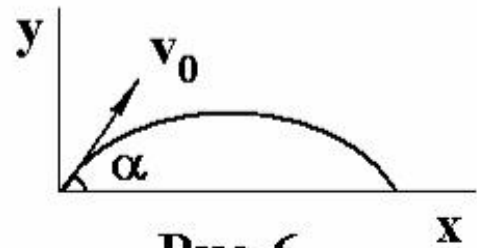


Рис. 6

Уравнения движения тела вдоль осей  $y$  и  $x$  имеют вид (рис.6)

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

Соответствующие компоненты скорости описываются уравнениями

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (2)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha. \quad (3)$$

Тангенциальное ускорение тела

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \stackrel{d}{=} \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \frac{g(gt - v_0 \sin \alpha)}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0 gt \sin \alpha}}. \quad (4)$$

Полное ускорение тела  $\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g$ , поэтому нормальное ускорение тела

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2} = \frac{gv_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0 gt \sin \alpha}}.$$

Производная  $da_n/dt$  обращается в нуль при  $t = t_0 = v_0 \sin \alpha / g$ . Это время в 2 раза меньше полного времени падения  $\tau = 2v_0 \sin \alpha / g$  (последнее выражение получается из уравнения движения (1), действительно,  $y(\tau) = 0$ ). Другими словами, максимум  $a_n$  достигается в высшей точке траектории. Вертикальной составляющей скорости  $v_y$  в этой точке нет, в чем легко убедиться, подставив  $t = v_0 \sin \alpha / g$  в уравнение (2). Горизонтальная составляющая скорости в соответствии с (3) со временем не меняется. Поэтому полная скорость тела в высшей точке траектории  $v_0 \cos \alpha$ . Соответственно

$$a_n = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R},$$

где  $R$  - радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке. Поскольку в высшей точке траектории  $a_n = g$  (касательное ускорение исчезает, в чем также легко убедиться, воспользовавшись уравнением(4)), то

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

**Пример 3.** Из шланга, установленного на земле, бьет струя воды с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Площадь сечения отверстия шланга  $S$ . Определить массу воды в струе, находящейся в воздухе.

Представим весь объем воды, вытекающей из шланга за время  $\Delta t$ , в виде цилиндра длиной  $l = v_0 \Delta t$ . Время, в течение которого «частичка» воды, имеющая скорость  $v_0$ , направленную под углом  $\alpha$  к горизонту, оказывается на земле, хорошо известно из кинематики криволинейного движения

$$\Delta t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Соответственно, масса воды, находящейся в воздухе

$$\Delta m = \rho S v_0 \Delta t,$$

где  $\rho$  - плотность воды и  $S$  - площадь поперечного сечения отверстия шланга. Окончательно

$$\Delta m = \frac{2\rho S v_0^2 \sin \alpha}{g}.$$

## 2. ДИНАМИКА

### 2.1. Основные понятия

*Динамика* - раздел физики, в котором изучаются причины, по которым тела движутся и характер этого движения.

Изменения в движении тел являются результатом их взаимодействий с другими телами. В ньютоновской механике эти взаимодействия описывают на языке сил, действующих между телами.

Основу динамики составляют три закона Ньютона.

*Первый закон* выделяет системы отсчета, в которых уравнения динамики имеют наиболее простой вид. Эти системы отсчета называют инерциальными. Под ними понимают такие системы отсчета, относительно которых материальные точки, не подверженные воздействию других тел, движутся равномерно и прямолинейно, или, как говорят, по инерции.

*Второй закон* Ньютона устанавливает связь между кинематической характеристикой движения — ускорением  $\mathbf{a}$  и динамическими характеристиками взаимодействия, т.е. силами взаимодействия. Он имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

$m$  — масса (инертная) тела. Данная формулировка справедлива для материальных точек и твердых тел, движущихся поступательно, при условии постоянства их массы.

Когда на тело действуют несколько сил, то под  $\mathbf{F}$  понимают результирующую (равнодействующую) всех сил. Второй закон Ньютона в более общей формулировке имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{p}$  — импульс тела. Т.е. скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на него силе. В этом случае снимается требование постоянства массы тела. Если сила  $\mathbf{F}$  постоянна, то изменение импульса тела под действием этой силы в течение интервала времени  $\Delta t$  определяется следующим выражением

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}\Delta t. \quad (3)$$

Величина  $\mathbf{F}\Delta t$  называются *импульсом силы*.

*Третий закон Ньютона* связывает между собой силы, с которыми тела действуют друг на друга. Он подразумевает, что если какие-либо два тела взаимодействуют друг с другом, то силы, возникающие между ними:

- имеют одну и ту же природу;
- действуют вдоль одной прямой;
- равны по величине;
- противоположны по направлению;
- приложены к разным телам.

Ключевая роль третьего закона Ньютона объясняется возможностью установить все силы, которые влияют на движение рассматриваемого тела.

Выражения для сил, входящих в уравнения динамики (1) или (2), берутся из тех разделов физики, где изучается их природа. Действие второго закона Ньютона можно распространить на тела, не являющиеся материальными точками и совершающими сложное движение. В этом случае в уравнении (1) под ускорением  $\mathbf{a}$  следует понимать ускорение точки тела, называемой центром масс, а в уравнении (3) под импульсом – величину  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{ц.м.}$ , где  $m$  — масса тела;  $\mathbf{v}_{ц.м.}$  — скорость центра масс.

*Центр масс* — точка твердого тела или системы тел, которая движется так же, как и материальная точка с массой, равной массе всей системы в целом  $m = \sum_i m_i$ , на которую действует та же результирующая сила, что и на тело (систему тел):

$$m\mathbf{v}_{ц.м.} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}_i$  - скорость отдельных тел системы (материальных точек).

Положение центра масс твердого тела или системы тел можно найти по формулам:

$$x_{ц.м.} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}; \quad y_{ц.м.} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}; \quad z_{ц.м.} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}. \quad (5)$$

Уравнение (4) легко получается при дифференцировании выражений (5) по времени.

Применение второго и третьего законов Ньютона к системе взаимодействующих тел позволяет сформулировать закон движения центра масс системы в простом виде: центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной сумме масс всех тел, входящих в систему, под действием силы, равной векторной сумме всех внешних (возникающих при взаимодействии с телами, не входящими в рассматриваемую систему) сил, действующих на тела рассматриваемой системы (называемой равнодействующей силой). Отсюда следует, что под действием только внутренних сил центр масс не может приобрести ускорение.



Решение динамических задач начинается с анализа всех сил, действующих на интересующее нас тело, т.е. с установления с какими иными телами и каким образом оно взаимодействует (с одним и тем же телом может существовать несколько видов взаимодействия).

Основное уравнение динамики — второй закон Ньютона — векторное уравнение. Для удобства решения его превращают в систему алгебраических уравнений, проецируя уравнение (или уравнения, записанные для каждого из интересующих нас тел) второго закона Ньютона на специально выбранные направления (оси).

Во многих задачах приходится рассматривать трение тел друг о друга. При наличии трения силу  $\mathbf{R}$ , с которой одно тело действует на другое, удобно рассмотреть как сумму двух сил: силы  $\mathbf{N}$ , направленной перпендикулярно (по нормали) к поверхности контакта (сила нормальной реакции опоры), и силы трения  $\mathbf{F}_{тр}$ , направленной по касательной к поверхности. При скольжении тел относительно друг друга модули этих составляющих силы  $\mathbf{R}$  связаны между собой (приближенным) законом Кулона-Амонтона, установленным экспериментально:  $F_{тр} = \mu N$ , где  $\mu$  — коэффициент трения (скольжения), зависящий от характера соприкасающихся поверхностей. Сила  $F_{тр}$  направлена в этом случае противоположно вектору скорости (направлению движения). В случае, когда взаимодействующие тела неподвижны относительно друг друга, выполняется соотношение:  $F_{тр} \leq \mu N$  и направление силы  $F_{тр}$  определяется из условия неподвижности тел. Если тело круглой формы (шар, цилиндр) катится по поверхности, то возникает третья разновидность силы трения — трение качения (первые две называют силами трения скольжения и покоя). При этом выполняется соотношение:  $F_{тр} = \mu_{кач} N$  и обычно  $\mu_{кач} \ll \mu$ .

## 2.2. ЗАДАЧИ

1. На клин, находящийся на горизонтальной поверхности, поместили брусок (рис. 1). Угол между гранями клина  $\alpha = 30^\circ$ . Коэффициент трения между клином и бруском  $\mu = \sqrt{3}/2$ . Какова максимальная величина ускорения  $a$ , с которым клин может двигаться

по поверхности при условии, что брусок не будет соскальзывать с клина?

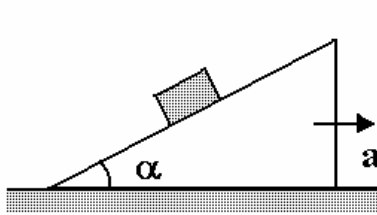


Рис. 1

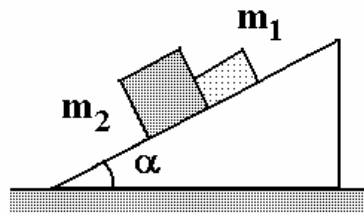


Рис. 2

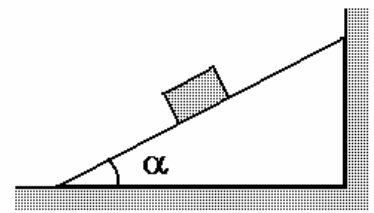


Рис. 3

2. Брусок массы  $m = 1$  кг равномерно втаскивают с помощью нити вверх по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Коэффициент трения  $\mu = 0,8$ . Найти угол  $\beta$ , который должна составлять нить с наклонной плоскостью, чтобы натяжение было наименьшим? Чему оно равно?
3. Два соприкасающихся бруска соскальзывают с наклонной плоскости (рис. 2). Масса первого бруска  $m_1 = 2$  кг, второго  $m_2 = 3$  кг. Коэффициенты трения между брусками и поверхностью плоскости  $\mu_1 = 0,1$  и  $\mu_2 = 0,3$ . Угол наклона плоскости к линии горизонта  $\alpha = 45^\circ$ . Определить силу, с которой бруски давят друг на друга.
4. Определить силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина, если на него положили брусок массой  $m = 1$  кг (рис. 3). Угол наклона клина  $\alpha = 30^\circ$ . Коэффициент трения между бруском и клином  $\mu = 0,3$ . Трение между клином и полом отсутствует.
5. На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  лежит тело (рис. 4). Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси. Расстояние от тела до оси вращения  $r = 10$  см. Наименьший коэффициент трения, при котором тело удерживается на вращающейся плоскости  $\mu = 0,8$ . Найти угловую скорость вращения.
6. На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  неподвижно лежит кубик, причем коэффициент трения между кубиком и плоскостью равен  $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ . Наклонная плоскость движется с ускорением  $a$  горизонтально в направлении прямого угла. При каком минимальном значении этого ускорения кубик начнет соскальзывать?

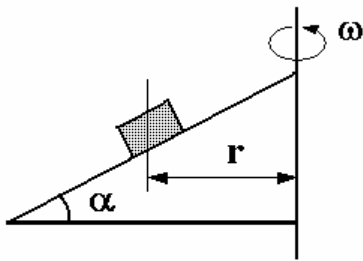


Рис. 4

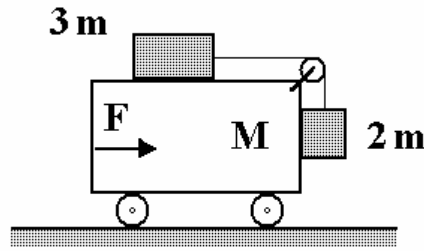


Рис. 5

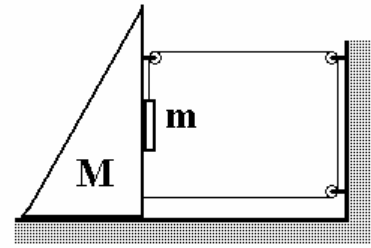


Рис. 6

7. Какую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к тележке массой  $M$ , чтобы бруски массой  $2m$  и  $3m$  не двигались относительно ее (рис. 5)? Трением пренебречь.
8. В системе, изображенной на рис. 6, трение между любыми поверхностями отсутствует. Найти ускорение тел.
9. Тележка массой  $m_1$  движется без трения по горизонтальной плоскости со скоростью  $v_0$ . На передний край тележки кладется тело массой  $m_2$ . Его начальная скорость равна нулю. При какой длине тележки тело не соскользнет с нее? Коэффициент трения между телом и тележкой равен  $\mu$ . Размерами тела по сравнению с длиной тележки  $l$  пренебречь.

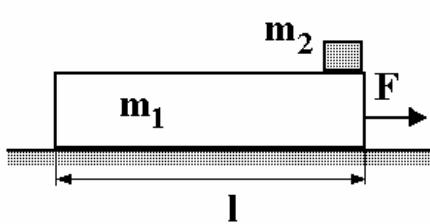


Рис. 7

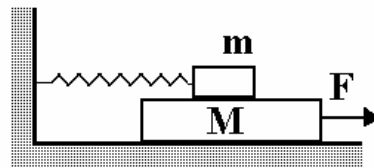


Рис. 8

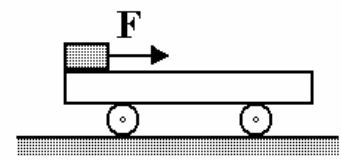


Рис. 9

10. Брусок массой  $m_1$  лежит на горизонтальной плоскости. На бруске находится тело массой  $m_2$  (рис. 7). Коэффициент трения между телом и бруском, а также между бруском и плоскостью, равен  $\mu$ . Исследовать движение при различных значениях силы  $F$ , приложенной к бруску в горизонтальном направлении.
11. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой  $M = 6$  кг, на ней брусок, связанный со стенкой пружиной жесткостью  $k = 1000$  Н/м (рис. 8). Коэффициент трения между доской и бруском  $\mu = 0,2$ . Какое расстояние проедет доска после того, как на нее начнет действовать горизонтальная сила  $F = 10$  Н, тянущая ее от стенки, прежде чем брусок начнет соскальзывать с доски? Масса бруска  $m = 2$  кг.
12. Тележка массой  $M$  может без трения катиться по горизонтальной поверхности. У заднего края тележки лежит брусок массой  $m$

(рис. 9). Коэффициент трения между бруском и тележкой  $\mu$ . К бруску приложена горизонтальная сила  $F$ , достаточная для того, чтобы брусок начал двигаться относительно тележки. Через какое время брусок упадет с тележки, если ее длина  $l$ ? При какой минимальной силе  $F_0$  брусок начнет скользить?

13. На гладком столе лежит кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$ . Кольцо сделано из проволоки, выдерживающей максимальное натяжение  $T_0$ . До какой угловой скорости  $\omega$  нужно раскрутить кольцо, чтобы оно разорвалось?
14. Доска массой  $M$  может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  к горизонту. В каком направлении и с каким ускорением должна бежать по доске собака массой  $m$ , чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости?
15. Коробка массой  $M$  стоит на горизонтальном столе (рис. 10). В коробке на пружине жесткостью  $k$  подвешен груз массой  $m$ . При какой амплитуде  $A$  колебаний груза коробка начнет подпрыгивать на столе?

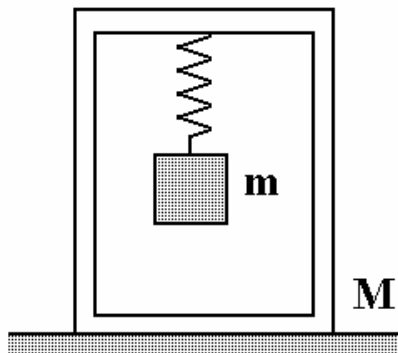


Рис. 10

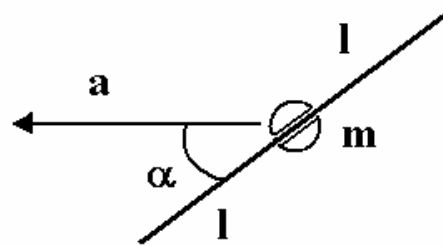


Рис. 11

16. На стержень длиной  $2l$  надета бусинка массой  $m$  (см. рис. 11). Бусинка может перемещаться по стержню без трения и в начальный момент она находится на середине стержня. Стержень поступательно перемещается в горизонтальной плоскости с ускорением  $a$ , составляющим угол  $\alpha$  с направлением стержня. Определить ускорение бусинки относительно стержня, силу реакции со стороны стержня на бусинку и время, через которое бусинка покинет стержень.
17. На гладкой горизонтальной плоскости лежит клин с углом наклона к горизонту  $\alpha$ . На клине находится небольшая шайба. Какое горизонтальное ускорение необходимо сообщить клину, чтобы шайба падала вертикально вниз?

При решении следующих задач помимо законов динамики целесообразно воспользоваться законом сохранения механической энергии

18. По спирали радиусом  $r$  при шаге  $h$  без трения начинает скользить продетая через нее бусинка. Определить время спуска, скорость и ускорение бусинки в нижней точке спирали после прохождения  $N$  витков.
19. Подвешенному на нити шарикун сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Когда нить отклонилась на угол  $\alpha = 30^\circ$  от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найти угол  $\beta$  максимального отклонения нити.
20. Шарик подвешен на нити и совершает колебания в вертикальной плоскости. При прохождении положения равновесия его ускорение равно  $a_0 = 10 \text{ м/с}^2$ . Чему равно ускорение шарика при максимальном отклонении от положения равновесия?

### 2.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** Брусок массой  $m_1$  лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения. На бруске находится тело массой  $m_2$  (рис. 12). Коэффициент трения между телом и бруском равен  $\mu$ . При каком значении силы  $F$ , приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску? Через сколько времени тело упадет с бруска? Длина бруска равна  $l$ .

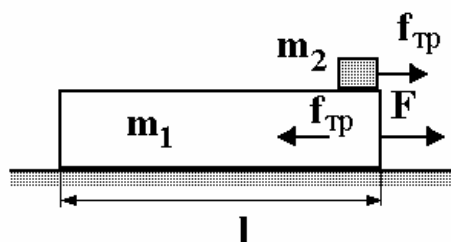


Рис. 12

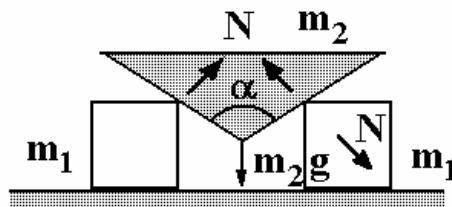


Рис. 13

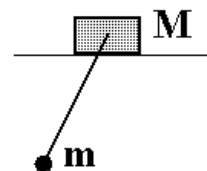


Рис. 14

Силы, действующие на тела с массами  $m_1$  и  $m_2$ , представлены на рис. 12. До начала режима проскальзывания верхнего тела, когда сила трения покоя  $f_{\text{тр}}$  лежит в интервале от 0 до  $\mu m_2 g$ , тела дви-

жуются с одинаковым ускорением  $a$ , которое определяется из решения системы уравнений динамики

$$F - f_{\text{ТР}} = m_1 a$$

$$f_{\text{ТР}} = m_2 a.$$

Отсюда

$$f_{\text{ТР}} = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Как только сила трения  $f_{\text{ТР}}$  превысит по величине максимальное значение силы трения покоя  $\mu m_2 g$ , начнется проскальзывание.

Это происходит при

$$F \frac{m_2}{m_1 + m_2} > \mu m_2 g$$

или при

$$F > \mu(m_1 + m_2)g.$$

В этом случае ускорения обоих тел становятся различными и система уравнений динамики принимает вид

$$F - \mu m_2 g = m_1 a_1,$$

$$\mu m_2 g = m_2 a_2.$$

Относительное ускорение тел

$$a_1 - a_2 = \frac{F - \mu m_2 g}{m_1} - \mu g.$$

Следовательно, время скольжения верхнего тела по бруску определяется из известного уравнения кинематики

$$l = \frac{(a_1 - a_2)t^2}{2}.$$

В результате

$$t = \sqrt{\frac{2lm_1}{F - \mu g(m_1 + m_2)}}.$$

**Пример 2.** Между двумя одинаковыми гладкими брусками массой  $m_1$  каждый вставлен клин массой  $m_2$  с углом при вершине  $\alpha$  (рис. 13). Определить ускорения тел.

Интересующие нас силы, действующие на клин и правый брусок, показаны на рис. 13. Ускорение клина  $a_2$  и ускорение правого бруска  $a_1$  связаны соотношением

$$a_1 = a_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

получающимся после двойного дифференцирования по времени соотношения

$$l_1 = l_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где  $l_1$  и  $l_2$  - элементарные перемещения бруска и клина.

Второй закон Ньютона для клина, записанный в проекции на вертикальную ось, имеет вид

$$m_2 g - 2N \sin \frac{\alpha}{2} = m_2 a_2. \quad (2)$$

Закон Ньютона для правого бруска в проекции на горизонтальную ось, выглядит следующим образом:

$$N \cos \frac{\alpha}{2} = m_1 a_1. \quad (3)$$

Система уравнений (1)-(3) имеет решение:

$$a_2 = \frac{g}{1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad a_1 = \frac{g \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

**Пример 3.** На гладкой горизонтальной плоскости стоит брусок массой  $M$ . К бруску привязана нить длиной  $l$ , на конце которой находится шарик массой  $m$  (рис. 14). В начальный момент нить была отклонена на некоторый угол и отпущена без начальной скорости. Найти скорость бруска в момент, когда нить проходит через вертикальное положение, зная, что ее угловая скорость в этот момент равна  $\omega$ .

Вдоль горизонтальной оси на систему не действуют внешние силы, поэтому горизонтальная координата центра масс системы не меняется. Центр масс системы находится на расстоянии

$$y_{ц.м.} = l \frac{M}{M + m}$$

от бруска вниз вдоль нити. Движение системы сводится к вращению тел относительно центра масс с угловой скоростью  $\omega$ . Запишем закон сохранения импульса вдоль горизонтальной оси в момент вертикального положения нити

$$Mv = m\omega \frac{lM}{m + M}.$$

Отсюда

$$v = \omega \frac{lm}{m + M}.$$

### 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

#### 3.1. Основные положения

В ряде случаев решение динамических задач облегчается использованием законов сохранения импульса и энергии. Особенно эффективным является использование этих законов в тех случаях, когда действующие силы непостоянны и непосредственное решение уравнений динамики с помощью элементарной математики невозможно.

Закон сохранения импульса формулируется для так называемых *замкнутых систем взаимодействующих тел*, под которыми понимаются такие системы, в которых на тела действуют только внутренние силы, т.е. тела системы взаимодействуют только друг с другом.

Суть закона сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы тел остается величиной постоянной при любых процессах, происходящих в системе, т.е. если  $\sum_i \mathbf{F}_{i, \text{внешн.}} = 0$ , то

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \text{const}.$$

В некоторых случаях закон сохранения импульса можно применять и к незамкнутым системам. Эти случаи следующие:

- внешние силы действуют на систему, но их равнодействующая равна нулю;
- если сумма проекций всех внешних сил, приложенных к системе



тел, на некоторое направление (например, ось  $Ox$ ) равна нулю, то сумма проекций импульсов тел системы на это направление сохраняется, т.е.  $\sum_i p_{i,x} = const$ ;

- продолжительность взаимодействия очень мала, а внешняя сила ограничена по величине (такая ситуация возможна, например, при столкновении тел, когда внешней силой является сила тяжести).

При прямолинейном движении тела *механическая работа* постоянной силы  $F$  равна произведению модуля силы на величину перемещения центра масс  $\Delta r$  и на косинус угла между векторами силы и перемещения:

$$A = F \Delta r \cos \alpha .$$

*Механическая энергия* характеризует способность тела совершать механическую работу. Полная механическая энергия системы тел складывается из суммы *кинетических энергий* тел  $E_K$  и их *потенциальной энергии*  $E_{\Pi}$ :

$$E_{MECH} = E_K + E_{\Pi} .$$

Кинетическая энергия — энергия движущегося тела. Для случая материальной точки или твердого тела массой  $m$ , движущегося поступательно со скоростью  $v$ :

$$E_K = \frac{mv^2}{2} .$$

Для вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega$  кинетическая энергия

$$E_K = \frac{J\omega^2}{2} ,$$

где  $J$  - момент инерции тела относительно оси вращения.

Потенциальной энергией обладают системы тел, взаимодействующие за счет консервативных сил, т.е. сил, работа которых зависит только от начального и конечного положений взаимодействующих тел, но не от формы их траектории.

*Потенциальная энергия тела над поверхностью Земли*

$$E_{\Pi} = mgH ,$$

где  $H$  - высота центра масс тела (или системы тел) над землей.

*Потенциальная энергия упругой деформации, например, пружины*

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2},$$

где  $x$  - растяжение или сжатие пружины по сравнению с ее равновесной длиной.

*Закон сохранения энергии* утверждает, что энергия бесследно не исчезает и не возникает, а лишь переходит из одной формы в другую.

При отсутствии внешних и неконсервативных сил, а также если они присутствуют, но работы не совершают, полная механическая энергия системы не изменяется:

$$E_{\text{МЕХ}} = E_{\text{К}} + E_{\text{п}} = \text{const}.$$

### 3.2. ЗАДАЧИ

1. Система состоит из двух одинаковых кубиков массы  $M$  каждый, между которыми находится вертикальная сжатая невесомая пружина жёсткостью  $k$  (рис. 1). Кубики связаны нитью, которую в некоторый момент пережигают. При каком минимальном значении начального сжатия пружины  $\Delta x$  нижний кубик подскочит после пережигания нити?
2. Два тела с массами  $m$  и  $3m$  двигаются по взаимно перпендикулярным направлениям по поверхности гладкого стола. После соударения тело с массой  $m$  остановилось. Какую часть его механической энергии составляет выделившееся при ударе тепло?
3. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединённые недеформированной пружиной (рис. 2). Какую наименьшую постоянную силу  $F$ , направленную горизонтально, надо приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся второй брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен  $\mu$ .
4. К лежащему на полу телу массой  $m=12$  кг прикреплена пружина жёсткостью  $k = 300$  Н/м. Коэффициент трения между телом и полом  $\mu=0,4$ . Вначале пружина была недеформирована. Затем, прикладывая к концу пружины силу, направленную под углом  $\alpha = 30^\circ$  к полу (рис. 3), медленно переместили тело на расстояние  $s=0,4$  м. Какая работа была при этом совершена?

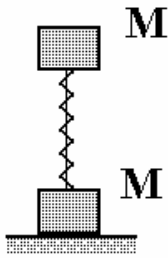


Рис. 1

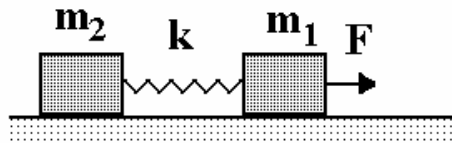


Рис. 2

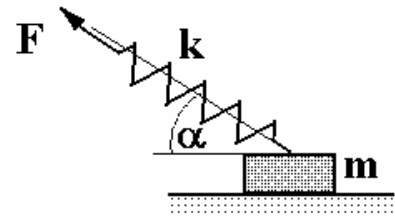


Рис. 3

5. Два одинаковых тела массы  $M$  каждое, соединённых невесомой пружиной жёсткостью  $k$ , лежат на горизонтальной плоскости (рис. 4). Левое тело касается вертикальной стенки. Какую минимальную скорость  $v_0$ , направленную к стенке, надо сообщить правому телу, чтобы при обратном движении от стенки оно сдвинуло левое тело? Коэффициент трения каждого тела о плоскость равен  $\mu$ . Пружина в начальный момент не деформирована.

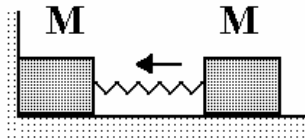


Рис. 4

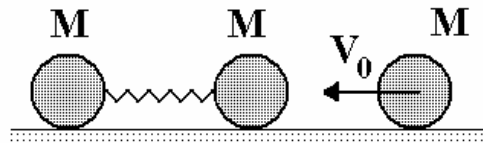


Рис. 5

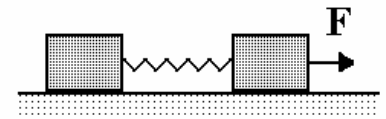


Рис. 6

6. Два неподвижных шарика одинаковой массы  $M$  соединены невесомой недеформированной пружиной жёсткостью  $k$  и длины  $L$  и находятся на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массы  $M$  движется со скоростью  $v_0$  по линии, соединяющей центры первых двух, и упруго соударяется с одним из них (рис. 5). Определить максимальное расстояние между шариками, связанными пружиной, в процессе их дальнейшего движения.
7. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска, соединённые невесомой пружинкой жёсткостью  $k$  и длины  $L$  в недеформированном состоянии (рис. 6). На один из брусков начали действовать постоянной горизонтальной силой  $F$ . Найти максимальное расстояние между брусками в процессе их движения. Считать, что в момент максимального растяжения пружины бруски имеют одинаковые скорости.

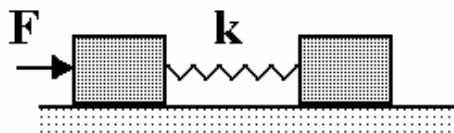


Рис. 7

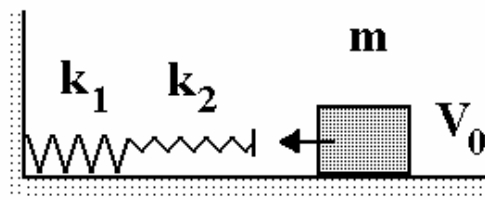


Рис. 8

8. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска, соединенные невесомой пружинкой жесткости  $k$  и длины  $L$  в недеформированном состоянии (рис. 7). На один из брусков начали действовать постоянной горизонтальной силой  $F$ . Найти минимальное расстояние между брусками в процессе их движения. Считать, что в момент максимального сжатия пружины бруски имеют одинаковые скорости.
9. Скользящее по горизонтальной поверхности тело массой  $m = 0,1$  кг налетает на две последовательно соединенные легкие пружины жесткостью  $k_1 = 100$  Н/м и  $k_2 = 150$  Н/м (рис. 8). Максимальная энергия деформации второй пружины оказалась равной  $W = 8$  Дж. Определить начальную скорость тела. Трением можно пренебречь.

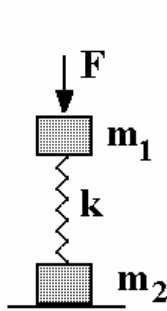


Рис. 9

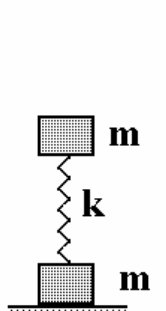


Рис. 10

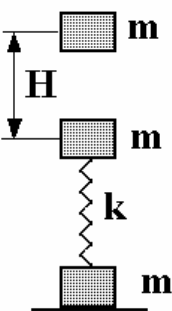


Рис. 11

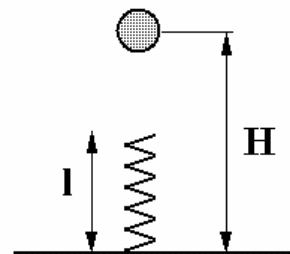


Рис. 12

10. С какой постоянной силой нужно надавить на верхний груз массы  $m_1$ , чтобы нижний груз массы  $m_2$ , соединенный с верхним пружиной жесткостью  $k$  (рис. 9), оторвался от пола после прекращения действия этой силы?
11. Насколько нужно "придавить" пружину, жесткости  $k$ , соединяющую два тела массой  $m$ , изображенные на рис. 10, чтобы при распрямлении пружины нижнее оторвалось от стола?
12. Пластинки массами  $m$  каждая соединены легкой пружиной жесткостью  $k$  (рис. 11). С какой высоты должен упасть на верхнюю пластину грузик массой  $m$ , чтобы при растяжении пружины нижняя пластина оторвалась от стола? Удар считать неупругим.

13. Груз массой  $m=1$  кг, подвешенный на пружине жесткостью  $k=200$  Н/м, находится на подставке. Пружина при этом недеформирована. Подставку быстро убирают. Определить максимальную скорость груза.
14. Легкая пружина жесткостью  $k$  и длины  $l$  стоит вертикально на столе (рис. 12). С высоты  $H$  над столом на нее падает небольшой шарик массы  $m$ . Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз?
15. Брусок массой  $m$  с прикрепленной к нему снизу пружиной (рис. 13) падает вертикально с высоты  $H$ . Найти максимальную скорость бруска. Длина недеформированной пружины  $l$ , жесткость  $k$ .

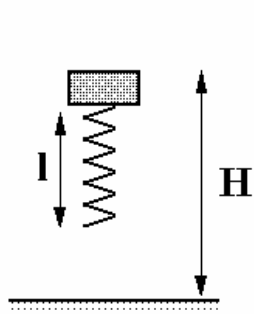


Рис. 13

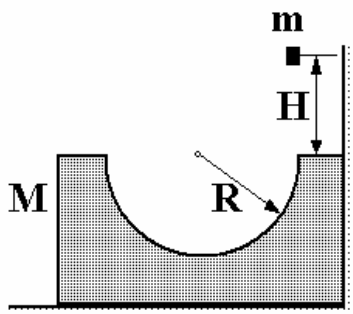


Рис. 14

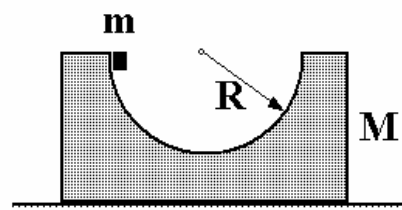


Рис. 15

16. С какой максимальной высоты  $H$  нужно отпустить маленькую шайбу массой  $m$ , чтобы она не поднялась над противоположной точкой цилиндрической выемки радиусом  $R$  в бруске массы  $M$ , изображенном на рис. 14? Трением пренебречь.
17. Найти скорость шайбы массой  $m$  относительно бруска массой  $M$  с цилиндрической выемкой, показанного на рис. 15, в нижней точке траектории. Радиус выемки  $R$ .
18. По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся с постоянной скоростью  $V$  два бруска массами  $m$  и  $3m$ , связанные нитью. Между брусками находится пружина жесткостью  $k$ , сжатая на величину  $x_0$  (рис. 16). Пружина прикреплена только к бруску массой  $m$ . Размеры брусков малы по сравнению с длиной нити, массой пружины пренебречь, скорость брусков направлена вдоль нити. Во время движения нить обрывается, и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити. Найти скорость бруска массой  $3m$  после его отделения от пружины. Найти время соприкосновения пружины с бруском массой  $3m$ , считая от момента разрыва нити.

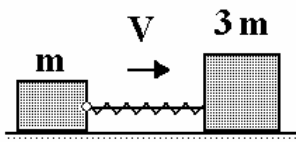


Рис. 16

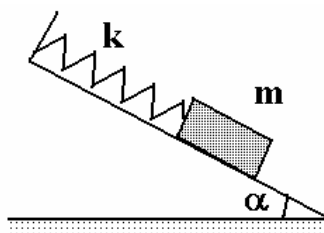


Рис. 17

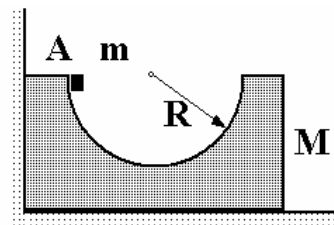


Рис. 18

19. На наклонной плоскости лежит брусок, соединенный пружиной с неподвижной опорой (рис. 17). Из положения, когда пружина недеформирована, брусок без начальной скорости отпускают, и он начинает скользить вниз. Определить максимальное растяжение пружины. Масса бруска  $m=0,5$  кг, жесткость пружины  $k=120$  Н/м, угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha = 45^\circ$ , коэффициент трения бруска о плоскость  $\mu = 0,5$ .
20. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит брусок массой  $M$  с углублением полуцилиндрической формы радиусом  $R$  (рис. 18). Из точки  $A$  без трения соскальзывает маленькая шайба массой  $m$ . Найти максимальную скорость бруска при его последующем движении.

### 3.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** *От груза, висящего на невесомой пружине жесткостью  $k$ , с нулевой начальной скоростью отрывается часть массой  $m$ . На какую максимальную высоту поднимется оставшаяся часть груза?*

На рис. 19 представлены три состояния системы: а) нерастянутая пружина, б) пружина, растянувшаяся под действием груза с массой  $M$ , в) пружина, поднимающаяся на максимальную высоту после отрыва части груза массой  $m$ . Потенциальную энергию в поле силы тяжести будем отсчитывать от нулевого уровня, показанного на рисунке.

Закон сохранения механической энергии, записанный в применении к состояниям, изображенным на рис. б) и в), выглядят следующим образом

$$\frac{kH^2}{2} = (M - m)g(H + x) + \frac{kx^2}{2}. \quad (1)$$

Растяжение  $H$  пружины под действием груза массой  $M$  в соответствии с законом Гука можно представить в виде

$$kH = Mg. \quad (2)$$

В дальнейшем удобно ввести новую переменную  $H + x = y$ . Тогда уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{kH^2}{2} = (M - m)gy + \frac{k(y - H)^2}{2}$$

и с учетом соотношения (2) имеем

$$y = \frac{mg^2}{k}.$$

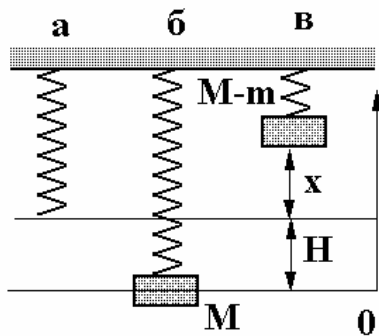


Рис. 19

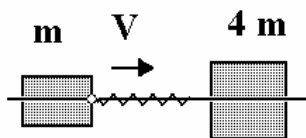


Рис. 20

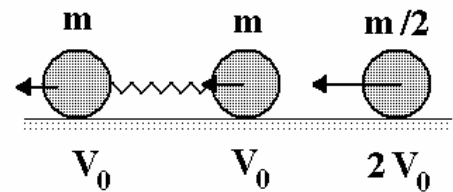


Рис. 21

**Пример 2.** Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. Муфта массой  $m$  с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью  $k$  движется со скоростью  $v$  (см. рис. 20). Муфта массой  $4m$  неподвижна. Размеры муфт много меньше длины пружины. Определить: 1) скорость муфты массой  $4m$  после отрыва от пружины, 2) время контакта муфты массой  $4m$  с пружиной.

Пусть  $v_1$  скорости обеих муфт в момент наибольшего сжатия пружины. Изменение импульса муфт связано с силой  $F$  взаимодействия муфт друг с другом и временем контакта  $\Delta t$  вторым законом Ньютона

$$\begin{aligned} mv - mv_1 &= F \Delta t, \\ 4mv_1 &= F \Delta t. \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{5}. \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии системы имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{1}{2}(5m)\left(\frac{v}{5}\right)^2,$$

где  $x$  - максимальное сжатие пружины. Из последнего уравнения следует, что

$$\frac{4}{5}mv^2 = kx^2.$$

Учитывая закон Гука

$$F = kx,$$

имеем:

$$F^2 = \frac{4}{5}kmv^2.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) и учитывая (2), нетрудно получить, что

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{m}{k}.$$

**Пример 3.** Два шарика одинаковой массы  $m$ , соединенные невесомой недеформированной пружиной жёсткостью  $k$  и длиной  $L$  скользят по гладкому горизонтальному столу с одинаковыми скоростями  $V_0$ . Третий шарик массой  $m/2$  движется со скоростью  $2V_0$  по линии, соединяющей центры первых двух, и упруго соударяется с одним из них (рис. 21). Определить минимальное расстояние между шариками, связанными пружиной, в процессе их дальнейшего движения. Считать, что в момент максимального сжатия пружины шарики имеют одинаковые скорости.

Предположим, что скорость распространения упругой деформации вдоль пружины много меньше скорости волны деформации внутри правого из шариков, соединенных пружиной. Пусть  $u$  - скорость этого шарика после соударения с шариком массой  $m/2$ ,  $w$  - скорость шарика массой  $m/2$  после соударения. Закон сохранения импульса системы «средний шар+крайний правый» имеет вид

$$\frac{m}{2}2v + mv = mu - \frac{m}{2}w. \quad (1)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{m}{2} (2v)^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m}{2} w^2. \quad (2)$$



Перепишем систему уравнений (1)-(2) в виде

$$\frac{m}{2}(2v + w) = m(u - v), \quad (3)$$

$$\frac{m}{2}((2v)^2 - w^2) = m(u^2 - v^2). \quad (4)$$

Раскрыв разность квадратов в уравнении и поделив (4) на (5), имеем

$$\begin{aligned} 2v - w &= u + v, \\ 2v = w + 2(u - v). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда

$$u = \frac{5}{3}v. \quad (6)$$

С такой скоростью движется средний шар после соударения с правым.

Дальнейшее движение шаров, связанных пружиной, сводится к равномерному движению центра масс с некоторой скоростью  $s$  и колебаниям пружины с амплитудой  $A$ . Закон сохранения импульса позволяет найти  $s$

$$mu + mv = 2ms.$$

Отсюда  $s = 4v/3$ .

Для поиска амплитуды воспользуемся законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = \frac{2ms^2}{2} + \frac{kA^2}{2}.$$

В результате

$$A = 3\sqrt{\frac{m}{2k}}v,$$

и наименьшее расстояние между шарами

$$L_{\min} = L - 3\sqrt{\frac{m}{2k}}v.$$

## 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 4.1. Основные положения

*Основной закон динамики вращательного движения* твердого тела относительно неподвижной оси

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt},$$

где  $M$  — момент силы;  $J$  — момент инерции тела относительно этой оси;  $\omega$  — угловая скорость. В случае постоянного момента инерции тела:

$$M = J\varepsilon,$$

где  $\varepsilon = d\omega/dt$  — угловое ускорение.

*Момент импульса тела*, вращающегося относительно оси

$$L = J\omega.$$

Величина момента силы  $\mathbf{F}$ , действующей на тело, относительно оси вращения:

$$M = F_{\perp}l,$$

где  $F_{\perp}$  — проекция силы  $\mathbf{F}$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения,  $l$  — плечо силы  $\mathbf{F}$  (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

*Момент инерции некоторых тел:*

- материальной точки массой  $m$

$$J = mr^2,$$

где  $r$  — расстояние от точки до оси;

- однородного диска массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска

$$J = mR^2/2;$$

- кольца, обруча, трубы радиусом  $R$  и массой  $m$

$$J = mR^2;$$

- шара массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно произвольной оси, проходящей через центр

$$J = 2/5mR^2;$$

- тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня и перпендикулярной ему

$$J = \frac{1}{12}ml^2,$$

где  $l$  — длина стержня.

*Теорема Штейнера:*

$$J = J_0 + ma^2,$$

где  $J$  — момент инерции тела относительно произвольной оси;  $J_0$  — момент инерции тела относительно воображаемой оси, параллельной заданной, но проходящей через центр масс тела;  $a$  — расстояние между этими осями.

*Закон сохранения момента импульса* для тела, вращающегося относительно оси, момент инерции которого меняется:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — начальный и конечный моменты инерции;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — начальная и конечная угловые скорости тела.

*Работа по вращению твердого тела* на угол  $d\varphi$

$$dA = Md\varphi$$

*Кинетическая энергия:*

— тела, вращающегося относительно неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2$$

— тела, катящегося по плоскости,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

где  $m$  — масса тела и  $v$  — скорость его центра масс.

## 4.2. ЗАДАЧИ

1. Маховик радиусом  $R=0,2$  м и массой  $m=10$  кг соединен с мотором с помощью приводного ремня. Натяжение ремня, идущего без скольжения, постоянно и равно  $T=4,7$  Н. Какое число оборотов в секунду будет делать маховик через  $t=10$  с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.
2. На цилиндр намотана гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили

цилиндру опускаться под действием силы тяжести (рис. 1). Определить линейное ускорение оси цилиндра, если цилиндр сплошной.

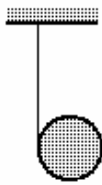


Рис. 1

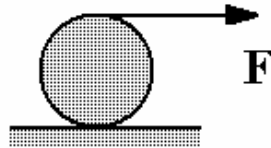


Рис. 2

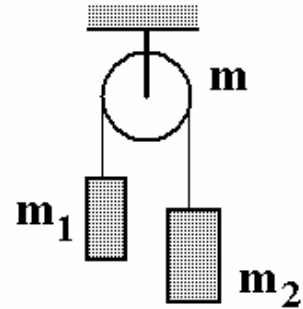


Рис. 3

3. Обруч радиусом  $R=0,40$  м раскрутили до угловой скорости  $\omega = 10 \text{ рад/с}$  и положили на горизонтальную поверхность. Какое время обруч будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения  $k=0,2$ ?
4. Цилиндр радиусом  $R$  и массой  $M$  без начальной скорости скатывается с наклонной плоскости с углом при основании  $\alpha$ . Найти ускорение цилиндра, и каков должен быть коэффициент трения, чтобы не было проскальзывания.
5. Вал массой  $m = 100 \text{ кг}$  и радиусом  $R = 5 \text{ см}$  вращался с частотой  $n = 8 \text{ с}^{-1}$ . К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой  $F = 40 \text{ Н}$ , под действием которой вал остановился через  $\tau = 10 \text{ с}$ . Определить коэффициент трения.
6. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом  $R=2$  м, стоит человек массой  $m_1=80$  кг. Масса  $m_2$  платформы равна 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти с какой угловой скоростью  $\omega$  будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью  $v=2$  м/с относительно платформы?
7. На сплошной цилиндр массы  $m=10$  кг и радиуса  $R=10$  см намотана невесомая и нерастяжимая нить (рис. 2). Цилиндр может без скольжения двигаться по горизонтальной плоскости. К концу нити приложена постоянная горизонтальная сила  $F=30 \text{ Н}$ . Определить поступательное ускорение цилиндра.
8. Определить ускорение брусков и силы натяжения нити в ситуации, изображенной на рис. 3. Блок представляет собой однород-

ный цилиндр массы  $m=8$  кг и радиусом  $R=10$  см, массы грузов  $m_1=1$  кг,  $m_2=10$  кг. Нить невесома и нерастяжима.

9. Деревянный стержень массой  $M=6$  кг и длиной  $l=2$  м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси (рис. 4). В конец стержня попадает пуля массой  $m=10$  г, летевшая со скоростью  $v=1000$  м/с, направленной перпендикулярно стержню и оси, и застревает в нем. Определить кинетическую энергию стержня после удара.
10. Однородный цилиндр радиуса  $R$  скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. За какое время угловая скорость цилиндра возрастет вдвое?
11. Какую часть от полной кинетической энергии составляет кинетическая энергия вращения для катящихся без скольжения тел: а) однородного цилиндра, б) шара, в) обруча?
12. Однородный диск вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . Из центра диска с постоянной скоростью  $u$  относительно диска по радиусу начал двигаться жук. На какой угол повернется диск к моменту достижения жуком обода диска? Масса диска  $M$ , масса жука  $m$ , радиус диска  $R$ .

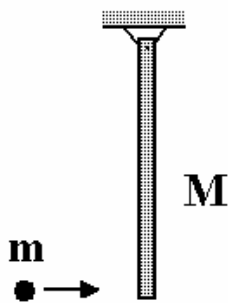


Рис. 4



Рис. 5

13. Шар начал качение без проскальзывания со скоростью  $v_0$ , направленной вверх по наклонной плоскости с углом при основании  $\alpha$ . Найти время движения шара до остановки.
14. Найти кинетическую энергию пули, вылетающей со скоростью  $v_0=800$  м/с из ствола винтовки, считая движение пули в канале ствола равноускоренным. Шаг винтовой нарезки канала ствола  $h=30$  мм, масса пули  $m=0,02$  кг. Пулю считать однородным цилиндром радиусом  $R=4$  мм.
15. Сплошному однородному цилиндру массой  $m$  и радиусом  $R$  сообщили вращение вокруг его оси с угловой скоростью  $\omega_0$ , затем его положили боковой поверхностью на горизонтальную плос-

кость и предоставили самому себе. Коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен  $\mu$ . Найти долю механической энергии, превратившейся в тепло.

16. Сплошной однородный цилиндр раскрутили до угловой скорости  $\omega_0$  вокруг его оси и положили на наклонную шероховатую плоскость. На какую максимальную высоту может подняться цилиндр? Угол наклона плоскости с горизонтом  $\alpha$ , коэффициент трения  $\mu$ .
17. На горизонтальном столе находится неподвижная горка массой  $M$  и высотой  $H$  (рис. 5). По столу в направлении горки катится сплошной однородный цилиндр массой  $m$ . При какой минимальной скорости центра масс  $v_0$  цилиндр сможет преодолеть горку? Считать, что качение цилиндра происходит без проскальзывания. Горка может без трения двигаться по столу.
18. Карандаш, стоящий вертикально на горизонтальной шероховатой поверхности, начинает падать так, что его нижний конец не смещается. Определить скорость верхней точки карандаша в момент удара о плоскость. Длина карандаша  $l=20$  см.
19. Платформа, имеющая форму однородного диска, вращается по инерции с угловой скоростью  $\omega_0$ . Как будет изменяться со временем угловая скорость платформы, если начнет падать снег? Масса снежинок в единице объема  $\rho$ , их скорость  $u$ , начальная масса платформы  $m_0$ , ее радиус  $R$ . Считать, что вся масса выпадающего снега остается на платформе.
20. Тонкий однородный обруч вкатывается вверх по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Какой должна быть начальная скорость его центра, чтобы он переместился по плоскости на расстояние  $l$ ?

### 4.3. Примеры решения задач

Пример 1. Найти ускорение бруска в ситуации, изображенной на рис. 6. Радиус однородного цилиндра  $R=10$  см, масса  $m_1=1$  кг, масса бруска  $m_2=2$  кг, блок считать невесомым, нить невесомой и нерастяжимой.

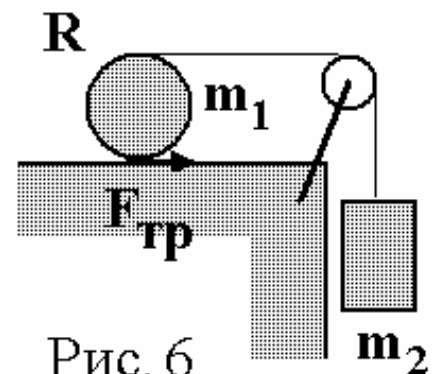


Рис. 6

Уравнения динамики поступательного движения, записанные для груза и цилиндра, имеют вид

$$m_2 g - T = m_2 a_2, \quad (1)$$

$$T + F_{\text{ТР}} = m_1 a_1, \quad (2)$$

где  $a_2$  - ускорение груза,  $a_1$  - ускорение центра масс цилиндра,  $T$  - сила натяжения нити,  $F_{\text{ТР}}$  - сила трения, действующая на цилиндр.

Скорость верхней точки цилиндра связана с угловой скоростью вращения цилиндра  $\omega$ , со скоростью его центра  $v_1$  и скоростью груза  $v_2$  соотношением

$$\omega R + v_1 = v_2.$$

Дифференцируя его по времени, имеем

$$\varepsilon R + a_1 = a_2, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  - угловое ускорение цилиндра.

Из условия, что нижняя точка цилиндра в каждый момент времени соприкасается с опорой и неподвижна следует, что  $\omega R = v_1$ . После дифференцирования по времени

$$\varepsilon R = a_1. \quad (4)$$

Уравнение динамики вращательного движения цилиндра

$$TR - F_{\text{ТР}}R = \frac{m_1 R^2}{2} \varepsilon. \quad (5)$$

Комбинируя уравнения (3) и (4), имеем

$$a_2 = 2a_1.$$

В результате систему уравнений динамики можно записать в виде

$$m_2 g - T = 2m_2 a_1,$$

$$T + F_{\text{ТР}} = m_1 a_1,$$

$$T - F_{\text{ТР}} = \frac{m_1}{2} a_1.$$

В результате

$$a_1 = g \frac{1}{2 + \frac{3 m_1}{4 m_2}}.$$

Для силы трения получаем следующее выражение

$$F_{\text{ТР}} = \frac{m_1}{8 + 3 \frac{m_1}{m_2}}.$$

Как только сила трения станет больше, чем  $\mu m_1 g$ , режим качения сменится проскальзыванием.

*Пример 2. Однородный шар радиуса  $R$  и массы  $M$  в начальный момент пущен по плоскости со скоростью  $v_0$  так, что он скользит по ней без качения. Между шаром и плоскостью существует трение, коэффициент которого равен  $\mu$ . Какое расстояние пройдет шар, прежде чем его движение превратится в качение?*

Запишем уравнения динамики поступательного и вращательного движения шара, пока он скользит по плоскости

$$ma = \mu mg, \quad (1)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mu mgR, \quad (2)$$

где  $\mu mg$  - сила трения скольжения,  $a$  - ускорение центра масс шара, где  $J = 2mR^2/5$  - момент инерции шара относительно горизонтальной оси, проходящей через центр шара и  $d\omega/dt$  - угловое ускорение.

Уравнение кинематики для центра масс шара

$$v = v_0 - \mu gt, \quad (3)$$

где  $\mu g$  - ускорение центра масс (см. уравнение (1)).

Интегрируя уравнение (2) и учитывая, что при  $t = 0$   $\omega = 0$ , имеем

$$\omega = \frac{5 \mu g}{2 R} t.$$

Пусть  $t_0$  - момент начала режима качения. При  $t = t_0$   $v = \omega R$  (нижняя точка шара имеет нулевую мгновенную скорость). При  $t = t_0$  уравнение (3) можно представить в виде

$$v_0 - \mu gt_0 = \frac{5 \mu g}{2 R} t_0 R.$$

Отсюда

$$t_0 = \frac{2 v_0}{7 \mu g}.$$

Путь, пройденный центром масс шара при его равнозамедленном движении за время  $t_0$ , определяется известной формулой кинематики

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$



В результате

$$S = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

Пример 3. На гладком столе покоятся два маленьких шарика массами  $5m$  и  $3m$ , скрепленных легким стержнем длиной  $L$  (рис.7) На шарик массой  $3m$  налетает и прилипает к нему кусочек пластилина массой  $2m$ , двигавшийся вдоль стола со скоростью  $v_0$  перпендикулярно стержню. Определить силу упругости, возникающую в стержне, при дальнейшем движении шаров.

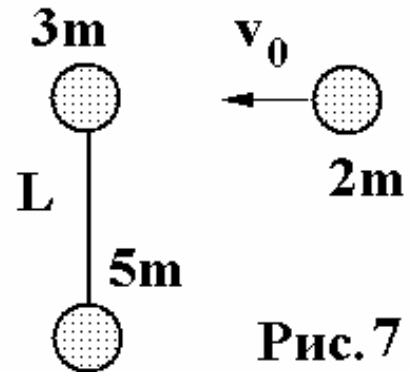


Рис. 7

В результате неупругого взаимодействия кусочка пластилина с шариком массой  $2m$  система из двух шариков с одинаковой массой  $5m$  приходит во вращательное движение вокруг их центра масс. Сила упругости, возникающая в стержне, равна центростремительной силе, действующей на каждый из шариков:

$$F = m \frac{v^2}{R},$$

где  $R = L/2$ .

Закон сохранения импульса дает

$$2mv_0 = 10mV,$$

где  $V$  - скорость центра масс.

Закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} 2mv_0^2 = \frac{1}{2} 10mV^2 + \frac{J\omega^2}{2},$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения стержня, связанная с линейной скоростью шариков соотношением

$$v = \omega \frac{L}{2},$$

$$J = 2 \cdot 5m(L/2)^2$$

- момент инерции шариков относительно оси, проходящей через центр масс.

В результате

$$v^2 = 4mv_0^2 / 25 \text{ и } F = \frac{8}{5} \frac{mv_0^2}{L}.$$

## 5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 5.1. Основные положения

*Дифференциальное уравнение гармонических свободных колебаний:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\omega_0$  — собственная круговая частота колебаний, определяемая параметрами колеблющейся системы;

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$  - для материальной точки массой  $m$ , колеблющейся под действием квазиупругой силы, характеризующейся коэффициентом жесткости  $k$ ;

$\omega_0 = \sqrt{g/l}$  - для математического маятника, имеющего длину  $l$ ;

$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}$  для физического маятника, где  $l$  — расстояние центра масс маятника от оси колебаний;  $J$  — момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний;

$\omega_0 = \sqrt{k/J}$  для крутильных колебаний тела, подвешенного на упругой нити, где  $J$  — момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью, а жесткость нити  $k$  равна отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается;

$\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$  для электромагнитных колебаний в контуре с электроемкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ .

*Общее решение уравнения гармонических колебаний:*

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $x$  — смещение колеблющейся точки от положения равновесия;  $A$  — амплитуда колебаний;  $\omega$  — их круговая (циклическая) частота;  $t$  — время;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний;  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  — фаза колебаний в момент  $t$ .

*Круговая частота колебаний:*

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T,$$

где  $\nu$  и  $T$  — частота и период колебаний соответственно.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Ускорение точки при гармоническом колебании:

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$W = \frac{1}{2}mA^2\omega^2.$$

*Дифференциальное уравнение затухающих колебаний*

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\beta$  - коэффициент затухания,  $\omega_0$  - собственная частота колебаний.

Общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

При  $\beta \ll \omega_0$  движение системы можно считать почти гармоническим колебанием с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A(t)$ , убывающей со временем по закону  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  ( $A_0$  — амплитуда колебаний в момент  $t = 0$ ).

*Период затухающих колебаний*

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

*Логарифмический декремент затухания*

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T,$$

где  $A(t)$  и  $A(t+T)$  — амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период  $T$ .

Обратная величина  $N_e = 1/\lambda$  есть число колебаний, совершаемых в течение времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

*Добротность*

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e.$$

При слабом затухании

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

*Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид*

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega t,$$

где  $a_0$ ,  $\omega$  - амплитудное значение и круговая частота внешнего периодического воздействия (силы).

Частное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляет собой гармоническое колебание с частотой вынуждающей силы:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

Фаза вынужденных колебаний

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad ; \quad A_{рез} = \frac{a_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Отношение резонансной амплитуды к статической амплитуде ( $\omega = 0$ ) при слабом затухании равно добротности колебательной системы

$$\frac{A_{рез}}{A(0)} = \frac{\pi}{\beta T} = Q,$$

т.е. добротность характеризует резонансные свойства системы.

*Волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где  $u$  — смещение точек среды с координатами  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$ ;  $v$  — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

*Уравнение плоской волны в среде без поглощения:*

$$u(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \cos (\omega t - kx + \varphi_0),$$

где  $\omega$  — круговая частота;  $k = 2\pi / \lambda = \omega / v$  — волновое число;  $\lambda$  — длина волны.

Длина волны связана с периодом  $T$  колебаний и частотой  $\nu$  соотношениями:

$$\lambda = \nu T = \frac{v}{\nu}$$

Разность  $\Delta\varphi$  фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно  $\Delta x$ :

$$\Delta\varphi = \Delta x \frac{2\pi}{\lambda}.$$

*Уравнение стоячей волны* (колебания струны, закрепленной в точке  $x = 0$ ):

$$u(x, t) = u_{\max} \sin \omega t \sin kx,$$

где  $u_{\max}$  — наибольшее смещение в стоячей волне.

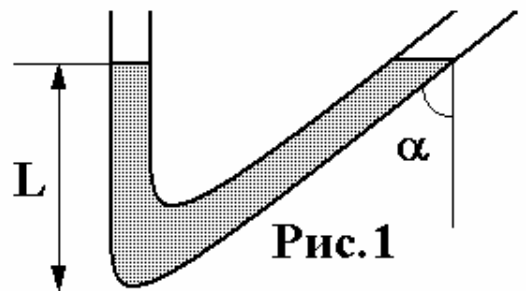
*Акустический эффект Доплера*

$$\nu = \nu_0 \frac{V + v_{\text{набл}}}{V - v_{\text{ист}}},$$

где  $\nu_0$  — частота звука, испускаемого источником,  $\nu$  — воспринимаемая частота звука,  $V$  — скорость звука,  $v_{\text{набл}}$  ( $v_{\text{ист}}$ ) — проекция скорости наблюдателя (источника звука) на линию, соединяющую наблюдателя и источник.

## 5.2. ЗАДАЧИ

1. Сколько времени  $\tau$  требуется телу, совершающему гармонические колебания по закону  $x = x_{\max} \sin \omega t$  для прохождения пути от точки  $x = x_{\max} / 2$  до точки  $x = x_{\max}$ , если период колебаний  $T=0,6$  с.
2. Секундный маятник, находящийся в движущемся лифте, за время 10 с делает 9 полных колебаний. Куда и с каким ускорением движется лифт?
3. Чашка пружинных весов массы  $m_1$  совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $A$ . Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массы  $m_2$ . В результате колебания прекратились. Определить первоначальный период колебаний чашки.
4. Брусок массы  $M$  под действием пружины совершает на гладком горизонтальном столе гармонические колебания с амплитудой  $A$  и периодом  $T$ . Вдоль оси движения летит пуля массы  $m$ . Попадая в брусок в момент прохождения им положения равновесия, она застревает в нем. В результате соударения колебания прекратились. Определить скорость пули.
5. Пренебрегая вязкостью, определить период малых колебаний жидкости в сообщающихся сосудах, показанных на рис. 1. Длина столба жидкости в вертикальном колене  $L$ , второе колено составляет с вертикалью угол  $\alpha$ .
6. Определить логарифмический декремент колебаний колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты  $\nu_0 = 10$  кГц на  $\Delta \nu = 2$  Гц.
7. Чему равен логарифмический декремент колебаний математического маятника, если за 1 мин амплитуда колебаний уменьшилась в два раза? Длина маятника 1 м.
8. Логарифмический декремент колебаний математического маятника равен 0,2. Найти во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника.



9. Найти число  $N$  полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в 2 раза. Логарифмический декремент колебаний  $\theta = 0,01$ .
10. Определить период  $T$  затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы  $T_0 = 1$  с, а логарифмический декремент колебаний  $\theta = 0,628$ .
11. Логарифмический декремент колебаний  $\theta$  маятника равен 0,003. Определить число  $N$  полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.
12. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой  $\nu = 1000$  Гц. Определить частоту  $\nu_0$  собственных колебаний, если резонансная частота  $\nu_{рез} = 998$  Гц.
13. К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на  $L = 9,8$  см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Чему должен быть равен коэффициент затухания  $\beta$ , чтобы колебания прекратились через время  $t = 10$  с (считать колебания прекратившимися, когда их амплитуда уменьшается до 1 % от начальной величины).
14. Звуковые колебания, имеющие частоту  $\nu = 500$  Гц и амплитуду  $A = 0,25$  мм, распространяются в воздухе. Длина волны  $\lambda = 70$  см. Найти максимальную скорость частиц воздуха.
15. Плоская звуковая волна имеет период  $T = 3$  мс, амплитуду  $A = 0,2$  мм и длину волны  $\lambda = 1,2$  м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние  $x = 2$  м, найти скорость  $\dot{\xi}$ , и ускорение  $\ddot{\xi}$  точек среды для момента времени  $t = 7$  мс. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.
16. Смещение из положения равновесия точки, находящейся на расстоянии  $x = 4$  см от источника колебаний, через промежуток времени  $t = T/6$  равно половине амплитуды. Найти длину волны.
17. На расстоянии  $l = 4$  см от источника волны частотой  $\nu = 440$  Гц перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определить расстояния от источника волн до точек, в которых будут первые три узла и пучности стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость  $\nu$  волны считать равной 340 м/с.
18. Определить длину  $\lambda$  бегущей волны, если в стоячей волне расстояние  $l$  между первой и седьмой пучностями равно 30 см.

19. Мимо неподвижного электроваза, гудок которого дает сигнал с частотой  $\nu_0 = 300$  Гц, проезжает поезд со скоростью  $u = 40$  м/с. Какова кажущаяся частота  $\nu$  тона для пассажира, когда поезд приближается к электровазу и когда удаляется от него?
20. Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя, высота тона звукового сигнала меняется скачком. Определить относительное изменение частоты  $\Delta\nu/\nu_0$ , если скорость поезда равна 54 км/ч.

### 5.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** Часы с маятником, период колебаний которого 1 с, на поверхности Земли показывают точное время. Насколько будут отставать эти часы за сутки, если их поднять на высоту  $H=200$  м над поверхностью Земли?

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Как известно, ускорение свободного падения зависит от высоты

$$g_H = g_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2,$$

где  $g_0 = 9,8$  м/с<sup>2</sup> - ускорение свободного падения у поверхности Земли,  $g_H$  - соответствующая величина на высоте  $H$ ,  $R_0$  - радиус Земли.

Таким образом, на высоте  $H$  период колебаний маятника будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0} \left( \frac{R_0 + H}{R_0} \right)^2} = T_0 \frac{R_0 + H}{R_0},$$

где

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}}$$

- период колебаний на нулевой высоте. Разница



$$T_H - T_0 = T_0 \frac{H}{R_0}.$$

Следовательно за 1 с на высоте  $H$  часы отстанут на  $H/R_0$  секунд, за сутки – на  $NH/R_0$ , где  $N = 24 \cdot 3600$  - число секунд в сутках.

**Пример 2.** *Период  $T_0$  собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период  $T$  того же маятника стал равным 0,56 с. Определить резонансную частоту  $\nu_{рез}$  колебаний.*

Резонансная частота  $\nu_{рез}$  колебательной системы связана с собственной круговой частотой  $\omega_0$  и коэффициентом затухания  $\delta$  соотношением

$$\nu_{рез} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{2\pi}.$$

Связь собственной круговой частоты с периодом собственных колебаний  $T_0$  следующая

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Решая выписанную систему уравнений, нетрудно получить следующую связь  $\nu_{рез}$  с  $T$  и  $T_0$

$$\nu_{рез} = \frac{\sqrt{2T_0^2 - T^2}}{TT_0}.$$

**Пример 3.** *Полузатопленное набухшее бревно вертикально стоит в озере, не касаясь дна, и совершает колебания вдоль своей оси. Определить период этих колебаний, если длина бревна  $L$ , плотность набухшей древесины  $\rho$ , плотность воды  $\rho_0$ .*

На рис. 2 представлены два положения бревна: а) в состоянии равновесия и б) при малом смещении  $y$  ( $y \ll L$ ) вниз вдоль оси  $y$ . Условие плавания бревна записывается в виде

$$\rho L S g = \rho_0 l S g, \quad (1)$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения бревна,  $l$  - длина погруженной части. Запишем второй закон Ньютона после небольшого смещения бревна вниз

$$\rho L S \ddot{y} = \rho L S g - \rho_0 S g (l + x).$$

Первое слагаемое справа – сила тяжести бревна, второе – архимедова сила в смещенном положении. С учетом (1), имеем

$$\ddot{y} + \frac{\rho_0 g}{\rho L} y = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho L}}.$$

Соответственно период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho L}{\rho_0 g}}.$$

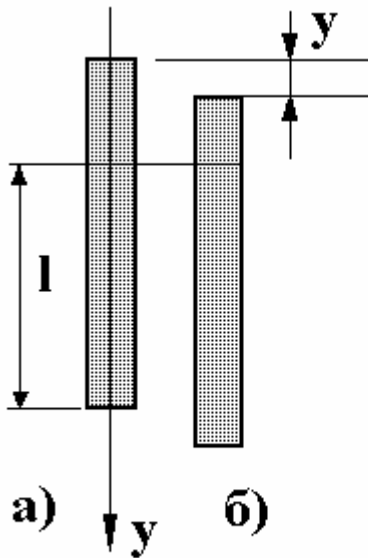


Рис. 2

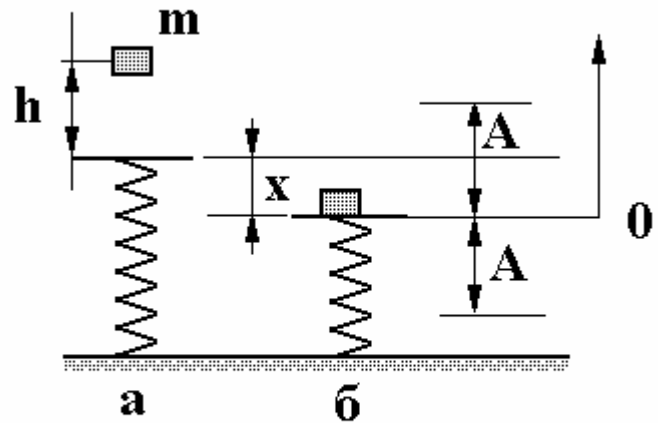


Рис. 3

**Пример 4.** Тело массой  $m$  упало с высоты  $h$  на чашу пружинных весов. Масса чаши и пружины пренебрежимо малы. Жесткость пружины  $k$ . Прилипнув к чаше, тело начинает совершать гармонич-

ческие колебания по вертикали. Найти амплитуду и энергию колебаний.

Два положения пружины изображены на рис. 3: а) ненапряженное состояние, б) состояние равновесия нагруженной прилипшим телом пружины, относительно которого совершаются колебания с амплитудой  $A$ .

В последнем состоянии скорость  $v_{\max}$  максимальна. Закон сохранения энергии дает (уровень отсчета потенциальной энергии в поле тяготения показан на рис. 3 б)

$$mg(x+h) = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (1)$$

Первое слагаемое справа – энергия упругой деформации пружины, просевшей на расстояние  $x$  под действием силы давления прилипшего к чаше тела. Этот процесс описывается законом Гука

$$mg = kx. \quad (2)$$

Решение системы уравнений (1)-(2) дает

$$v_{\max}^2 = 2gh + \frac{mg^2}{k}.$$

Полная энергия колебаний

$$W = \frac{mv_{\max}^2}{2} = mg \left( h + \frac{mg}{2k} \right).$$

С другой стороны

$$W = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда

$$A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}.$$

## 6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

### 6.1. Основные понятия

Воздействие отдельных частей жидкости или газа друг на друга характеризуют скалярной физической величиной, называемой давлением.

Основной закон статики жидкостей и газов - закон Паскаля, согласно которому давление, производимое внешними силами в каком-либо месте среды (жидкости или газа), передается по всем направлениям без изменения. Проявлением этого закона служит закон сообщающихся сосудов, в соответствии с которым однородная жидкость в сообщающихся сосудах устанавливается на одном уровне.

Если несжимаемая жидкость находится в поле сил тяжести, то на глубине  $h$  ее гидростатическое давление

$$p = \rho g h ,$$

где  $\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения.

Различие давления в жидкости на разных уровнях приводит к тому, что на погруженное в жидкость (или газ) тело действует выталкивающая сила, равная по величине весу вытесненной этим телом жидкости. Эту силу называют силой Архимеда. Сила Архимеда для полностью погруженного в жидкость с плотностью  $\rho$  тела

$$F_A = \rho g V ,$$

где  $V$  - объем тела. Для плавающего тела

$$F_A = \rho g V_{п.ч.} ,$$

где  $V_{п.ч.}$  - объем погруженной части тела.

Вес тела в жидкости  $P$  меньше силы тяжести на величину архимедовой силы

$$P = mg - F_A .$$

При описании движущейся жидкости вводят понятие *линий тока*, под которыми понимают такие линии, касательные к которым в любой точке совпадают с направлением вектора скорости частиц жидкости  $\mathbf{v}$  в этих точках. Если вектор скорости  $\mathbf{v}$  в каждой точке жидкости не зависит от времени, то картина линий тока не будет меняться во времени. Движение жидкости в этом случае называют стационарным. При стационарном движении несжимаемой жидкости справедливо уравнение неразрывности:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 ,$$

где  $S_1$  и  $S_2$  - площади поперечных сечений потока жидкости, перпендикулярных направлению скорости, а  $v_1$  и  $v_2$  — скорости течения жидкости в этих сечениях. Уравнение неразрывности при стационарном движении жидкости означает постоянство расхода ее в единицу времени.

Жидкость называют идеальной, если при ее движении можно пренебречь ее вязкостью, т.е. силами трения между слоями жидкости. Для идеальной жидкости математическим выражением закона сохранения полной механической энергии является уравнение Бернулли:

$$p + \rho gH + \frac{\rho v^2}{2} = const.$$

В данной формуле  $H$  — высота некоторой точки линии тока,  $p$  и  $v$  — давление и скорость жидкости в этой точке соответственно. Высота  $H$  любой точки отсчитывается от одного уровня, условно принятого за нулевой.

Скорость истечения  $v$  жидкости через небольшое отверстие, расположенное в стенке или на дне широкого сосуда на глубине  $h$ ,

$$v = \sqrt{2gh}$$

- формула Торричелли.

## 6. 2. ЗАДАЧИ

1. В воде тело весит  $P_1 = 10H$ , в керосине  $P_2 = 12H$ . Найти его вес  $P_3$  в глицерине. Плотность воды  $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ , керосина  $\rho_2 = 0,8 \cdot 10^3$ , глицерина  $\rho_3 = 1,25 \cdot 10^3$  кг/  $M^3$ .
2. Полый медный шар весит в воздухе  $P_1 = 1,78H$ . В воде его вес равен  $P_2 = 1,42H$ . Определить объем полости внутри шара. Плотность меди  $\rho = 8,9$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_1 = 1$  г/см<sup>3</sup>.
3. Деревянный шарик, замороженный в кусок льда, удерживается внутри цилиндрического стакана с водой нитью, прикрепленной ко дну и шарик. Лед с шариком целиком погружен в воду и не касается стенок и дна сосуда. После того, как лед растаял, шарик остался целиком погруженным в воду. Натяжение нити за время таяния льда уменьшилось в  $k$  раз, а уровень воды в стакане уменьшился на  $\Delta H$ . Чему равен объем шарика, если плотность воды  $\rho_0$ , дерева -  $\rho$ , площадь внутреннего сечения стакана  $s$ .
4. Какая сила давления может быть получена на гидравлическом прессе, если к длинному плечу рычага, передающего давление на малый поршень, приложена сила  $f=100$  Н, соотношение плеч рычага равно  $N=9$ , а площади поршней пресса соответственно равны  $s=5$  см<sup>2</sup> и  $S= 500$  см<sup>2</sup>. КПД пресса 80%?

5. Полный шар, отлитый из свинца, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найти объем внутренней полости, если масса шара  $M=5$  кг.
6. Пластиковый шарик массой  $m=15$  г и объемом  $V=5$  см<sup>3</sup> удерживают над водой на высоте  $H=1$  м. Шарик удерживают с помощью струи воды, вытекающей из брандспойта, расположенного на высоте  $H=1$  м над поверхностью воды. Шарик сообщают скорость  $V=2$  м/с. На какую глубину сможет погрузиться шарик?
7. С какой высоты  $h$  должно падать тело, имеющее плотность  $\rho=0.4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, чтобы оно погрузилось в воду на глубину  $H=6$  см. Сопротивлением воды и воздуха пренебречь.
8. Резиновый мячик массой  $m=10$  г и объемом  $V=10$  см<sup>3</sup>, находится под водой на глубине  $h=1$  м. На какую высоту  $s$  над поверхностью воды выпрыгнет мячик.
9. Струя воды с площадью поперечного сечения, равной  $S=4$  см<sup>2</sup>, вытекает в горизонтальном направлении из брандспойта, расположенного на высоте  $H=2$  м над поверхностью земли, и падает на эту поверхность на расстоянии  $l=8$  м. Пренебрегая сопротивлением воздуха движению жидкости, найти избыточное давление воды в рукаве, если площадь поперечного сечения рукава  $S_2=50$  см<sup>2</sup>.
10. В горизонтально расположенной трубе площадью поперечного сечения  $S_1=20$  см<sup>2</sup> течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь  $S_2=8$  см<sup>2</sup>. Разность уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна  $\Delta H=8$  см. Определить объемный расход жидкости  $Q$ .
11. В цилиндрическом сосуде высотой  $H=70$  см и площадью дна  $S=600$  см<sup>2</sup> образовалось отверстие площадью  $S_2=1$  см<sup>2</sup>. Сколько времени понадобится для того, чтобы вода из сосуда вытекла полностью?
12. В бак равномерной струей в единицу времени поступает объем воды  $Q=2$  дм<sup>3</sup>/с. В дне бака имеется отверстие площадью  $S=2$  см<sup>2</sup>. На каком уровне будет держаться вода в баке?
13. Из крана выливается вода. На протяжении  $l=3$  см диаметр струи уменьшается с  $d_1=3$  см до  $d_2=2$  см. Сколько воды вытекает из крана за  $t=1$  мин?
14. Горизонтальная струя воды бьет в вертикальную стенку. С какой силой струя давит на стенку, если скорость истечения воды  $v=10$

- м/с и вода поступает через трубку, имеющую сечение  $S = 4 \text{ см}^2$ ?  
Считать, что после удара вода стекает вдоль стенки.
15. Сосуд с водой подвешен к потолку. Высота воды в сосуде  $h$ . На сколько изменится натяжение подвеса, если в днище сосуда открыть маленькое отверстие, из которого вытекает струя сечения  $s$ ?
  16. Из брандспойта бьет вертикально вверх струя воды. Определить площадь поперечного сечения струи  $S_2$  на высоте  $h = 2 \text{ м}$  над концом брандспойта, если вблизи него она равна  $S_1 = 1,5 \text{ см}^2$ , а расход воды  $Q = 60 \text{ л/мин}$ .
  17. Из брандспойта бьет струя воды под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту и падает от него на расстоянии  $l = 5 \text{ м}$ . Сколько воды подаёт брандспойт за  $t = 10 \text{ с}$ , если площадь его отверстия равна  $S = 2 \text{ см}^2$ ? Сопротивлением воздуха пренебречь.
  18. На столе стоит цилиндрический сосуд высоты  $H$ , наполненный доверху водой. Пренебрегая вязкостью воды, определить высоту  $h$  (над уровнем стола), на которой следует сделать в сосуде небольшое отверстие, чтобы вытекающая из него струя попадала на стол на наибольшем удалении от сосуда. Определить наибольшее удаление.
  19. Широкий сосуд с водой скользит по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  так, что уровень воды устанавливается параллельно этой плоскости. Из небольшого отверстия около дна сосуда вытекает вода со скоростью  $u$ . Определить коэффициент трения  $\mu$  между сосудом и плоскостью, если масса сосуда  $m$ , площадь отверстия  $S$ . Изменением массы воды, связанным с ее истечением из сосуда, пренебречь.
  20. Цилиндрический сосуд радиусом  $R$  заполнен жидкостью с плотностью  $\rho_0$ . На дне сосуда находится шарик радиусом  $r$  и плотностью  $\rho$  ( $r \ll R$ ;  $\rho > \rho_0$ ). Сосуд вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Найти силу давления шарика на боковую стенку сосуда.

### 6.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** На поршень шприца площадью  $s_1$  действует сила  $F$ . С какой скоростью  $v_2$  должна вытекать в горизонтальном на-

правлении жидкость из отверстия площади  $s_2$ ? Плотность жидкости равна  $\rho$ .

Обозначим  $v_1$  скорость поршня. Из уравнения неразрывности следует, что

$$s_1 v_1 = s_2 v_2. \quad (1)$$

Запишем уравнение Бернулли для горизонтальной линии тока, проходящей через выходное отверстие

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (2)$$

где  $p_1 = F / s_1$  - давление жидкости в шприце. Входящее в уравнение Бернулли давление можно рассматривать еще и как давление жидкости на стенки. Поскольку вытекающая из шприца струя свободна (лишена каких бы то ни было стенок), в правой части уравнения (2) давление отсутствует. Решение уравнений (1)-(2) следующее

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho s_1 (1 - s_2^2 / s_1^2)}}.$$

**Пример 2.** *Гайка, вмороженная в кусок льда, висит на нити. После того как снизу поднесли цилиндрический стакан с водой, в которую целиком погрузили лед с гайкой, натяжение нити уменьшилось на  $\Delta T$ , а уровень воды в стакане повысился. Лед с гайкой при этом висит на нити в воде и не касается стенок и дна стакана. После того, как лед растаял, гайка осталась висеть на нити целиком погруженная в воду, а уровень воды в стакане за время таяния льда понизился на  $\Delta H$ . Чему равен объем гайки? Площадь внутреннего сечения стакана  $S$ .*

Разница натяжения нити  $\Delta T$  равна архимедовой силе, действующей на гайку, вмороженную в лед

$$\Delta T = \rho_0 g(v + V),$$

где  $\rho_0$  - плотность воды,  $v$  - объем гайки и  $V$  - объем льда. Из условия задачи следует, что

$$v + V - V_{o.в.} = S \Delta H,$$

где  $V_{o.в.}$  - объем воды, образовавшейся после таяния льда. Поскольку масса растаявшего льда равна массе образовавшейся из него воды

$$\rho V = \rho_0 V_{o.в.},$$



где  $\rho$  - плотность льда. Решение выписанной системы уравнений дает

$$v = \frac{\rho_0}{\rho} S \Delta H - \frac{\Delta T}{\rho g} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

**Пример 3.** Пренебрегая вязкостью, найти период колебаний жидкости в U-трубке, длина каждого из колен которой  $L$ .

Дадим малое приращение  $y$  уровню жидкости в левом колене (рис. 1). Уравнение Ньютона для столба жидкости в левом колене имеет вид

$$\rho S(L+y) \ddot{y} = \rho S(L+y)g + \rho S(L$$

, где  $S$  - площадь поперечного сечения обоих колен,  $\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения.

Первое слагаемое справа – сила тяжести левого столба жидкости, второе – сила давления правого столба, передаваемая левому согласно закону Паскаля.

Учитывая, что  $y \ll L$  в скобке в левой части уравнения, имеем

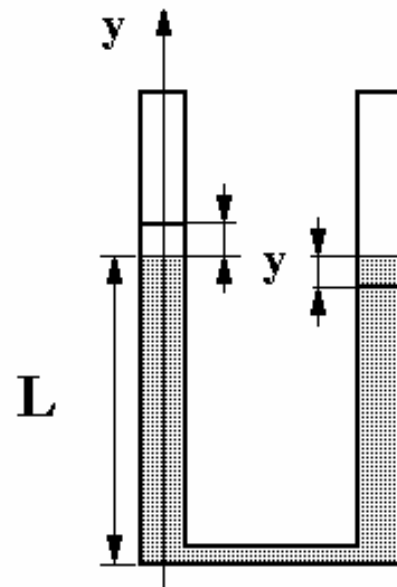
$$\ddot{y} + \frac{2g}{L} y = 0.$$

Последнее уравнение – уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}.$$



**Рис. 1**

## 7. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗА

### 7.1. Основные положения

Молекулярно-кинетическая теория объясняет свойства макроскопических тел и процессов, в них протекающих, на основе представлений об их микроскопическом молекулярном составе, т.е. исходя из предположения, что все макроскопические тела состоят из мельчайших частиц (молекул), которые хаотически движутся и взаимодействуют друг с другом.

Из-за малости масс атомов и молекул их массу принято выражать не в килограммах или граммах, а в специальных единицах, масса которых сравнима с массой атомов. В качестве единицы измерения масс молекул берут  $1/12$  массы атома углерода (углеродная единица или *атомная единица массы* — а.е.м.).

Для анализа химических превращений удобно ввести единицу количества вещества, которая содержит одинаковое количество молекул любого вещества. Единицей количества вещества в СИ является *моль*. В одном моле любого вещества содержится столько же молекул, сколько молекул содержится в 12 г углерода. Эту величину

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}$$

называют *числом* (или постоянной) *Авогадро*. Массу одного моля вещества называют его молярной массой  $\mu$ . Количество вещества или число молей любого тела может быть выражено через число молекул  $N$ , входящих в состав тела, и число Авогадро, или через его массу  $m$  и молярную массу вещества тела  $\mu$

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}.$$

Молекулярная физика изучает свойства и поведение макроскопических систем — объектов, которые состоят из огромного количества мельчайших частиц вещества — молекул.

В рамках молекулярной физики рассматриваются равновесные состояния макроскопических систем, в которых описывающие систему макроскопические параметры — давление, плотность, температура — не изменяются от одной точки системы к другой. Как по-

Как показывает опыт, любая изолированная макроскопическая система с течением времени переходит в равновесное состояние и остается в нем сколь угодно долго.

Основной модельной макроскопической системой, которая рассматривается в молекулярной физике, является *идеальный газ*. Идеальным газом называется макроскопическая система, состоящая из большого количества молекул, потенциальная энергия взаимодействия которых много меньше их кинетической энергии. Для того чтобы газ можно было считать идеальным, должны выполняться следующие условия:

- температура газа должна быть достаточно высока (при этом велика кинетическая энергия молекул);
- газ должен быть достаточно разреженным (при этом мала энергия взаимодействия молекул газа).

Практически это означает, что «собственный» объем молекул много меньше объема, занимаемого газом, а потенциальная энергия их взаимодействия много меньше их кинетической энергии. Как показывает опыт, атмосферный воздух при комнатной температуре и давлении до нескольких десятков атмосфер с хорошей степенью точности можно считать идеальным газом.

Макроскопические параметры идеального газа связаны *уравнением состояния*

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \quad (1)$$

которое было установлено на основе обобщения экспериментальных данных и называется уравнением Клапейрона-Менделеева. Здесь  $p$  — давление газа,  $V$  — его объем,  $m$  — масса газа,  $\mu$  — его молярная масса (масса одного моля),  $R = 8,3$  Дж/(моль·К) — постоянная, которая называется универсальной газовой постоянной,  $T$  — абсолютная температура,  $\nu = m/\mu$  — число молей газа (количество вещества). Абсолютная температура, которая измеряется в градусах Кельвина (или просто в Кельвинах), связана с температурой  $t$  по шкале Цельсия соотношением:

$$T = t + 273.$$

Универсальная газовая постоянная  $R$  связана следующим соотношением с числом Авогадро и постоянной Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К

$$R = kN_A.$$

С учетом последней формулы уравнение состояния идеального газа (1) можно записать в следующем виде:

$$pV = \nu N_A kT = NkT, \quad (2)$$

где  $N = \nu N_A$  — число молекул газа. Такая форма записи уравнения состояния наиболее удобна при описании смеси газов, поскольку параметры газа в уравнении (2) не связаны с сортом молекул, а только с их количеством.

Если разделить уравнение (2) на объем газа, можно получить еще одну форму записи уравнения состояния идеального газа

$$P = nkT, \quad (3)$$

где  $n = N/V$  — концентрация молекул газа (число молекул в единице объема).

Пусть в сосуде находится смесь разных идеальных газов. *Парциальным давлением* той или иной компоненты смеси называется давление этой компоненты в предположении, что она занимает весь объем сосуда

$$p_i V = \frac{m_i}{\mu_i} RT = \nu_i RT = N_i kT, \quad (4)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -й компоненты смеси;  $\mu_i$  — ее молярная масса;  $\nu_i$  — число молей;  $N_i$  — число молекул  $i$ -й компоненты смеси. Из формул (1) и (2) следует, что давление смеси газов

$$p = \frac{NkT}{V} = kT \sum_i \frac{N_i}{V} = RT \sum_i \nu_i = \sum_i p_i \quad (5)$$

Формула (5) называется *законом Дальтона* и описывает давление смеси газов.

Основным соотношением, связывающим микроскопические (т.е. характеризующие отдельную молекулу) и макроскопические (характеризующие тело в целом) параметры тела, является определение температуры

$$\frac{3}{2} kT = \langle E \rangle,$$

где  $T$  — абсолютная температура тела,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\langle E \rangle$  — средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, которая определяется как

$$\langle E \rangle = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N}{N} = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2},$$

где  $E_1, E_2, \dots, E_N$  - кинетические энергии поступательного движения отдельных молекул,  $N$  - число молекул тела,  $m_0$  - масса одной молекулы,  $\langle v^2 \rangle$  - средний квадрат скорости одной молекулы, который определяется как

$$\langle v^2 \rangle = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_N^2}{N}$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_N$  - скорости молекул. Квадратный корень из среднего квадрата скорости молекулы называют *средней квадратичной скоростью*  $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ .

Из-за столкновения со стенками сосуда молекулы газа оказывают давление на стенки. Рассмотрение процесса взаимодействия молекул идеального газа со стенками сосуда на основе самых общих предположений о характере этого взаимодействия позволяет получить *основное уравнение молекулярно-кинетической теории*:

$$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle = nkT.$$

## 7.2. ЗАДАЧИ

1. В сосуде находится 1 л воды при температуре  $27^{\circ}\text{C}$ . Чему стало бы равно давление внутри сосуда, если бы силы притяжения между молекулами воды внезапно бы исчезли?
2. По трубе с площадью поперечного сечения  $S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  течет углекислый газ. Давление газа  $p = 3,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , температура  $T = 280 \text{ К}$ , причем за время  $t = 10$  мин через поперечное сечение трубы проходит  $m = 20$  кг газа. Найти скорость течения газа по трубе.
3. На дне цилиндра, наполненного воздухом, плотность которого  $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$  лежит полый металлический шарик радиусом  $r = 1 \text{ см}$ . До какого давления нужно сжать воздух в цилиндре, чтобы шарик всплыл? Опыт производят при  $T = 290 \text{ К}$ . Воздух считать идеальным газом. Масса шарика  $m = 5 \text{ г}$ ,  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

4. Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной  $L = 80$  см до половины погружают в ртуть. Затем закрывают верхнее отверстие трубки и вынимают ее из ртути. При этом в трубке остается столбик ртути длиной  $h = 22$  см. Найти атмосферное давление. Плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .
5. Сосуд объемом  $V = 1$  л занят смесью из  $m_1 = 2$  г кислорода и  $m_2 = 3$  г азота. Каково давление этой смеси при  $t = 27^\circ\text{C}$ ? Молярная масса кислорода  $\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ , азота  $\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .
6. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находится водород массой  $m_1 = 4$  г, а с другой - азот массой  $m_2 = 24$  г. Какую часть объема цилиндра занимает водород?
7. Во сколько раз уменьшилась плотность газа при его нагревании в колбе от температуры  $t_1 = 17^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 307^\circ\text{C}$ ?
8. Узкая цилиндрическая трубка длины  $L = 30$  см, закрытая с нижнего конца, содержит воздух, отделенный от наружного столбиком ртути длиной  $h = 10$  см. Какова была длина  $l$  столбика воздуха в трубке, если при перевертывании трубки открытым концом вниз из трубки вылилась половина ртути? Плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ .
9. Смесью состоит из кислорода массой  $m_1 = 32$  г и углекислого газа массой  $m_2 = 44$  г. Какова ее плотность  $\rho$  при температуре  $t = 107^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 83 \text{ кПа}$ ?
10. Баллон, содержащий гелий массой  $m_1 = 1$  кг, при испытании взорвался при температуре  $T_1 = 600 \text{ К}$ . Какую массу водорода  $m_2$  можно хранить в таком же баллоне при температуре  $T_2 = 800 \text{ К}$ , имея пятикратный запас прочности?
11. В цилиндре с площадью основания  $S = 100 \text{ см}^2$  находится воздух. Поршень расположен на высоте  $h_1 = 50$  см от дна цилиндра. На поршень кладут груз массой  $m = 50$  кг, при этом он опускается на расстояние  $L = 10$  см. Найти температуру  $T_2$  воздуха после опускания поршня, если до его опускания давление было  $p_1 = 10^5 \text{ Па}$ , а температура  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ .
12. Сосуд объемом 2 л разделен на две равные части полупроницаемой перегородкой. В первую половину сосуда введена смесь аргона массой 20 г и водорода массой 2 г, во второй половине – ва-

- куум. Через перегородку может диффундировать только водород. Какое давление установится в первой половине сосуда после окончания процесса диффузии. Во время процесса поддерживалась температура  $20^{\circ}\text{C}$ . Перегородка неподвижна.
13. В сосуде объема  $V=1$  л находится  $m=0,28$  г азота. Азот нагрет до температуры  $t=1500^{\circ}\text{C}$ . При этой температуре  $\alpha = 30\%$  молекул азота диссоциировало на атомы. Определить давление в сосуде.
  14. Резиновый шар содержит  $V=2$  л воздуха, находящегося при температуре  $t=15^{\circ}\text{C}$  и атмосферном давлении  $P=104$  кПа. Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину  $H=10$  м? Температура воды  $t_1 = 10^{\circ}\text{C}$ .
  15. В озере на глубине  $h=100$  м при температуре  $t = 8^{\circ}\text{C}$  находится в равновесии шар массой  $m=40$  г, наполненный воздухом. Найти массу воздуха внутри шара, если атмосферное давление нормальное. Шар считать тонкостенным, изготовленным из резины.
  16. Тонкостенный стакан массой  $M = 5$  г ставят вверх дном на поверхность воды и медленно опускают его вглубь таким образом, что он все время остается вертикальным. На какую минимальную глубину надо опустить стакан, чтобы он утонул? Высота стакана  $H = 10$  см, площадь дна  $S = 20$  см<sup>2</sup>. Давлением паров воды в стакане пренебречь. Атмосферное давление  $p = 10^5$  Па.
  17. Теплоизолированный сосуд разделен неподвижной перегородкой на части объемами  $V_1$  и  $V_2$ . В первую поместили  $\nu_1$  молей атомарного газа одного сорта, во вторую -  $\nu_2$  другого при одинаковой температуре. Перегородка абсолютно проницаема только для молекул газа первого сорта. Определить отношение установившихся давлений в обеих частях.
  18. Цилиндр сечения  $S = 10$  см<sup>2</sup> закрыт поршнем массы  $m = 5$  кг. При движении сосуда вниз с ускорением  $4g$  объем газа под поршнем увеличивается в два раза. Температура газа не меняется. Найти внешнее давление.
  19. Посередине лежащего на боку заполненного газом запаянного цилиндрического сосуда длиной  $L=1$  м находится тонкий поршень массой  $m=1$  кг и площадью  $S=10$  см<sup>2</sup>. Если сосуд поставить на основание, то поршень перемещается на расстояние  $l=10$  см. Каково было начальное давление  $p$  газа в сосуде?
  20. В гладкой горизонтально закрепленной трубе, профиль которой

показан на рис. 1, находятся два подвижных поршня, соединенных друг с другом тонким стержнем. Площади поршней  $S_1 = 10 \text{ см}^2$  и  $S_2 = 40 \text{ см}^2$ . Правый поршень соединен пружиной жесткостью  $k = 400 \text{ Н/м}$  с точкой О. В первоначальном состоянии температура всюду  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Давление воздуха между поршнями равно наружному давлению  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Пружина не деформирована. Затем газ между поршнями нагрели на  $\Delta T = 100 \text{ К}$ , а точку О переместили вправо на такое расстояние  $x$ , чтобы положение поршней не изменилось. Найти  $x$ .

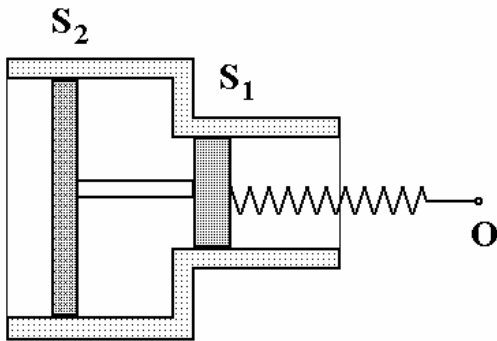


Рис. 1

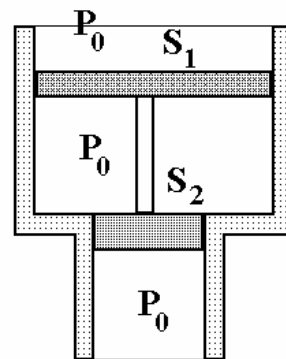


Рис. 2 а

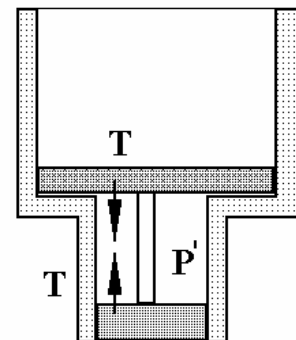
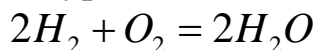


Рис. 2 б

### 7.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** В камеру сгорания реактивного двигателя поступает в секунду масса  $m$  водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Площадь выходного сечения сопла двигателя  $S$ , давление в этом сечении  $p$ , температура  $T$ . Определить силу тяги двигателя.

Из уравнения химической реакции



следует, что масса водяного пара, образующегося в результате сгорания водорода, в 9 раз больше массы водорода. Если  $v$  - скорость истечения пара из сопла, то за время  $\Delta t$  из сопла вытекает масса пара  $\rho S v \Delta t$ , т.е.

$$\rho S v \Delta t = 9m,$$

где  $\rho$  - плотность водяного пара. Используя закон Ньютона в форме  $\Delta p = F \Delta t$ ,



имеем следующее выражение для силы тяги двигателя

$$F = \frac{81m^2}{\rho S}.$$

Используя уравнение Клапейрона-Менделеева

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT,$$

имеем окончательно

$$F = \frac{81m^2 RT}{\mu \rho S},$$

где  $\mu$  - молярная масса водяного пара.

**Пример 2.** В гладкой вертикально закрепленной трубе, профиль которой показан на рис. 2 а, находятся два невесомых подвижных поршня, соединенных друг с другом невесомым тонким стержнем. Площади поршней  $S_1$  и  $S_2$ . Начальное положение поршней показано на рис. 2 а. При этом давление воздуха между поршнями равно наружному давлению  $p_0 = 10^5$  Па. Определить минимальную высоту столба воды, которую надо налить на верхний поршень, чтобы он опустился до стыка двух труб. Процесс считать изотермическим.

Два состояния системы показаны на рис. 2 а и 2 б Уравнение изотермического перехода, связывающего эти состояния, имеет вид

$$p_0 S_1 = p' S_2,$$

где  $p'$  - давление газа между поршнями во втором положении. В состоянии 2 стержень, соединяющий поршни, растянут. Баланс сил для верхнего поршня в момент его подхода к стыку труб следующий

$$p_0 S + \rho g H S_1 + T = p' S_1,$$

где  $T$  - сила натяжения стержня. Баланс сил для нижнего поршня

$$p' S_2 = p_0 S_2 + T.$$

Решая эту систему уравнений, имеем

$$H = \frac{p_0 (S_1 - S_2)^2}{\rho g S_1 S_2}.$$

## 8. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ

### 8.1. Основные положения

Математическим аппаратом, на котором базируется статистический метод описания газа, является теория вероятности.

Вероятностью данного события  $P$  называется отношение числа  $n^*$  благоприятных исходов опытов (т.е. таких, в которых интересующее нас событие произошло) к полному числу опытов  $n$

$$P = \frac{n^*}{n}.$$

Суммой двух событий  $A$  и  $B$  называется событие, заключающееся в том, что произошло либо событие  $A$ , либо событие  $B$ .

Произведением двух событий  $A$  и  $B$  называется событие, состоящее в появлении и  $A$  и  $B$  совместно.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности первого события на вероятность второго события, вычисленную в предположении, что первое событие произошло.

Если при измерении некоторой физической величины  $a$  возможно  $k$  различных исходов, причем с вероятностью  $P_1$  получается значение величины  $a_1$ , с вероятностью  $P_2$  - значение величины  $a_2$  и т.д., то среднее значение или математическое ожидание этой величины

$$\langle a \rangle = \sum_i a_i P_i,$$

причем  $\sum_i P_i = 1$ .

Аналогично, среднее значение произвольной функции  $\varphi(a)$

$$\langle \varphi(a) \rangle = \sum_i \varphi(a_i) P_i.$$

Объектом статистической физики является ансамбль – система, содержащая огромное число  $N$  молекул или атомов. Пусть каждый из элементов ансамбля имеет определенное значение физического параметра  $z$ . *Функцией распределения*  $f(z)$  элементов ансамбля по параметру  $z$  называют отношение

$$f(z) = \frac{dN}{Ndz},$$

где  $dN$  - количество частиц, у которых физический параметр  $z$  лежит в пределах от  $z$  до  $z + dz$ ,  $N$  - полное число частиц ансамбля.

Из определения функции распределения следует т.н. условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 1.$$

Среднее значение параметра  $z$  по ансамблю определяется формулой

$$\langle z \rangle = \int_{z_1}^{z_2} zf(z)dz,$$

где  $z_1$  и  $z_2$  - минимальное и максимальное значения параметра. Аналогично среднее значение произвольной функции  $\varphi(z)$  параметра  $z$  определяется формулой

$$\langle \varphi(z) \rangle = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)f(z)dz.$$

В статистической физике рассматриваются функции распределения молекул идеального газа по проекциям скоростей  $v_x$ , модулям скоростей  $v$ , кинетическим энергиям  $\varepsilon_k$ , потенциальным энергиям  $\varepsilon$ , высотам  $h$  в поле силы тяжести:

$$f(v_x) = \frac{dN}{Ndv_x} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m_0 v_x^2}{2kT} \right),$$

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right),$$

$$f(\varepsilon_k) = \frac{dN}{Nd\varepsilon_k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{3/2} \varepsilon_k^{1/2} \exp\left( -\frac{\varepsilon_k}{kT} \right),$$

$$f(\varepsilon) = \frac{dN}{Nd\varepsilon} \frac{1}{kT} \exp\left( -\frac{\varepsilon}{kT} \right),$$

$$f(h) = \frac{dN}{Nd h} \frac{m_0 g}{kT} \exp\left( -\frac{m_0 gh}{kT} \right),$$

где  $m_0$  - масса молекулы,  $N$  - число молекул,  $T$  - температура газа,  $k$  - постоянная Больцмана,  $g$  - ускорение свободного падения.

Из последней формулы следует т.н. *барометрическая формула*

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right),$$

где  $P_0$  и  $P$  - давления атмосферы на уровне Земли и на высоте  $h$ .

Явлениями переноса называются неравновесные процессы в идеальном газе, связанные с переносом массы (*диффузия*) и кинетической энергии (*теплопроводность*) молекулами идеального газа, происходящими вследствие неоднородного распределения концентрации молекул и температуры в занимаемом газом объеме. Явление *внутреннего трения* связано с переносом молекулами газа импульса направленного движения и возникает, когда скорости направленного движения соседних слоев газа различны.

Среднее число столкновений, испытываемых молекулой идеального газа в единицу времени

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где  $n$  - концентрация молекул газа,  $d$  - эффективный диаметр молекулы,  $\langle v \rangle$  - средняя скорость молекул газа ( $\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv$ ).

Расстояние, проходимое молекулой в среднем между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами, называется *средней длиной свободного пробега молекулы*  $\langle l \rangle$ . Оно определяется формулой

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Масса  $\Delta M$  газа, перенесенная в результате диффузии через площадку  $S$  за время  $\Delta t$ , определяется *законом диффузии Фика*

$$\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t,$$

где  $\Delta \rho / \Delta x$  - градиент плотности диффундирующего газа,  $D$  - коэффициент диффузии, определяемой формулой

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Сила внутреннего трения при взаимодействии двух слоев газа определяется *законом внутреннего трения Ньютона*

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} S,$$

где  $\Delta v / \Delta x$  – градиент скорости направленного движения в направлении  $x$ , перпендикулярном скорости направленного движения слоев,  $S$  – площадь взаимодействующих слоев газа,  $\eta$  – коэффициент внутреннего трения (*динамической вязкости*) определяемый соотношением

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где  $\rho$  – плотность газа.

Количество теплоты  $\Delta Q$ , переносимое газом вследствие теплопроводности через площадку  $S$ , перпендикулярную оси  $x$ , за время  $\Delta t$  определяется *законом теплопроводности Фурье*

$$\Delta Q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x} S \Delta t,$$

где  $\Delta T / \Delta x$  – градиент температуры вдоль оси  $x$ , а коэффициент теплопроводности  $\kappa$  дается формулой

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle \tilde{c}_v,$$

где  $\tilde{c}_v$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Коэффициенты диффузии, внутреннего трения и теплопроводности газа связаны друг с другом соотношением

$$\kappa = \tilde{c}_v \eta = \tilde{c}_v \rho D.$$

## 8.2. ЗАДАЧИ

1. Эффективный диаметр молекулы кислорода  $d_0 = 0,27 \cdot 10^{-9}$  м. Определить среднее число  $\langle z \rangle$  столкновений молекулы в единицу времени, если начальное давление газа  $P_0 = 10^5$  Па, а температура  $T_0 = 250$  К. Как будет изменяться величина  $\langle z \rangle$  в зависимости от температуры при адиабатическом расширении газа? Определить значение  $\langle z \rangle$  в конце процесса, если известно, что газ расширился вдвое.

2. Идеальный газ совершает изотермический процесс, при котором давление газа увеличивается. Во сколько раз изменились при этом средняя длина свободного пробега молекулы, среднее число соударений молекулы в единицу времени?
3. Коэффициент теплопроводности одноатомного газа  $\kappa = 45 \cdot 10^{-2}$  Вт/м·К, а коэффициент диффузии при тех же условиях  $D = 10^{-2}$  Па·с. Определить число молекул в объеме  $V = 1$  м<sup>3</sup> газа при этих условиях
4. Идеальный газ совершает изохорический процесс. При этом давление газа увеличивается в  $n$  раз. Во сколько раз изменились при этом средняя длина свободного пробега молекулы, среднее число соударений молекулы в единицу времени?
5. Оценить размер молекулы воды в жидком состоянии при нормальных условиях.
6. Определить зависимость коэффициента диффузии  $D$  от давления при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Построить соответствующие графики.
7. Найти зависимость коэффициента теплопроводности от давления при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.
8. Найти зависимость коэффициента теплопроводности от температуры при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Изобразить эти зависимости на графиках.
9. Определить зависимость коэффициента динамической вязкости от давления при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Построить соответствующие графики.
10. Определить зависимость коэффициента динамической вязкости от температуры при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Построить соответствующие графики.
11. Найти зависимость средней длины свободного пробега молекул идеального газа от давления при следующих процессах: 1) изотермическом; 2) изохорном. Построить соответствующие графики.
12. Найти зависимость средней длины свободного пробега молекул идеального газа от температуры при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном. Построить соответствующие графики.
13. На сколько уменьшится атмосферное давление  $P = 100$  кПа при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту  $H = 100$

- м? Считать, что температура воздуха  $T=290$  К и не изменяется с высотой.
14. Распределение молекул по скоростям отличается от максвелловского и имеет вид  $f(v) = Cv^3 e^{-mv^2/(2kT)}$ . Определить коэффициент  $C$  из условия нормировки.
  15. Зная функцию распределения молекул по скоростям, определить среднюю скорость молекул  $\langle v \rangle$ .
  16. Используя функцию распределения молекул по скоростям, определить наиболее вероятное значение модуля скорости.
  17. Используя функцию распределения молекул по кинетическим энергиям, определить среднее значение кинетической энергии молекулы.
  18. Распределение молекул идеального газа по длинам свободного пробега  $l$  описывается формулой  $f(l) = A \exp(-l/\langle l \rangle)$ , где  $\langle l \rangle = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n)$  - средняя длина свободного пробега. Определить, какая доля  $\Delta N/N$  от общего числа молекул имеет длину свободного пробега не менее  $2\langle l \rangle$ . Какова вероятность того, что длина свободного пробега выбранной наугад молекулы заключена в пределах от  $10\langle l \rangle$  до  $11\langle l \rangle$ ?
  19. Исходя из распределения Максвелла по скоростям, найти среднюю квадратичную скорость молекулы.
  20. Молекулы некоторого газа распределены по координате в соответствии функцией распределения Гаусса  $f(x) = dN/N dx = A \exp(-\alpha x^2)$ . Предполагая параметр  $\alpha$  известным, вычислить постоянную  $A$ . Найти среднее значение  $\langle x^2 \rangle$  квадрата  $x$  - координаты молекулы.

### 8.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** *Определить зависимость коэффициента диффузии  $D$  от температуры  $T$  при следующих процессах: 1) изобарном; 2) изохорном.*

Как известно, коэффициент диффузии  

$$D \sim \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где  $\langle v \rangle$  - средняя скорость молекул газа,  $\langle l \rangle$  - средняя длина свободного пробега молекулы

$$\langle l \rangle \sim \frac{1}{nd^2},$$

где  $d$  - диаметр молекулы и  $n$  - концентрация молекул. Средняя скорость молекул

$$\langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{kT}{m_0}},$$

где  $k$  - постоянная Больцмана и  $m_0$  - масса молекулы.

Таким образом

$$D \sim \sqrt{\frac{T}{m_0}} \frac{1}{nd^2}.$$

Из уравнения состояния идеального газа

$$p = nkT$$

следует, что

$$n \sim \frac{p}{T},$$

следовательно

$$D \sim \sqrt{\frac{T}{m_0}} \frac{T}{pd^2}.$$

При изобарическом процессе ( $p = \text{const}$ )

$$D \sim T^{3/2},$$

при изохорном ( $n = \text{const}$ )

$$D \propto \sqrt{T}$$

**Пример 2.** Ротор центрифуги вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Используя функцию распределения Больцмана, установить распределение концентрации  $n$  частиц массой  $m$ , находящихся в роторе центрифуги, как функцию расстояния  $r$  от оси вращения.

Распределение концентрации частиц в силовом поле описывается распределением Больцмана

$$n \sim Ae^{-U/kT},$$



где  $U$  - потенциальная энергия частицы. На частицу в роторе действует центробежная сила инерции, направленная вдоль радиуса центрифуги

$$F = m\omega^2 r.$$

Потенциал этой силы находится из общей формулы механики

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}:$$

$$U = -\int m\omega^2 r dr + C.$$

При  $r = 0$   $U = 0$ , поэтому постоянная интегрирования  $C = 0$ , т.е.

$$U = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Таким образом

$$n(r) = A e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}.$$

Так как при  $r = 0$   $n = n_0$ , где  $n_0$  - концентрация частиц на оси ротора, то окончательно

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}.$$

## 9. ТЕРМОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

### 9.1. Основные положения

Термодинамика изучает тепловые процессы, проходящие с макроскопическими телами, т.е. телами, состоящими из большого количества молекул. Термодинамическое описание основывается на введении понятия состояния системы, которое определяется совокупностью термодинамических параметров — физических величин, характеризующих это состояние. Такими параметрами являются, например, масса системы, плотность вещества, температура, давление. В термодинамике рассматриваются только равновесные состояния макроскопических систем, т.е. такие состояния, которые характеризуются равенством параметров состояния во всех частях системы. Основные параметры равновесного состояния связаны соотношением, которое называется уравнением состояния. Для иде-

ального газа таким соотношением является уравнение Клапейрона-Менделеева.

Всякое изменение состояния системы называется *термодинамическим процессом*. Процесс называется *равновесным*, если в течение этого процесса макроскопическая система проходит непрерывный ряд равновесных состояний, т.е. после каждого небольшого изменения термодинамических параметров система успевает прийти в равновесие. Поэтому равновесный термодинамический процесс должен проходить бесконечно медленно, а любой реальный процесс может быть описан в рамках термодинамики с той или иной степенью точности.

Важнейшим термодинамическим параметром состояния макроскопической системы является ее *внутренняя энергия*  $U$ . Внутренней энергией макроскопической системы называется сумма кинетических энергий молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Для одноатомного идеального газа — это кинетическая энергия поступательного движения молекул

$$U = N \langle E \rangle = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{3}{2} pV,$$

где  $\langle E \rangle$  - средняя энергия поступательного движения одной молекулы;  $N$  - число молекул;  $k$  - постоянная Больцмана;  $T$  - абсолютная температура;  $m$  - масса газа;  $\mu$  - его молярная масса;  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $p$  - давление газа;  $V$  - его объем.

Если молекулы газа состоят из нескольких атомов, то необходимо учитывать вклад в энергию газа энергии вращения молекул и энергии колебания атомов в молекуле. Для большинства двухатомных газов при комнатных температурах внутренняя энергия определяется формулой

$$U = \frac{5}{2} NkT = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{5}{2} pV.$$

*Первый закон термодинамики* выражает закон сохранения энергии в применении к тепловым процессам и утверждает, что изменение внутренней энергии  $\Delta U$  макроскопической системы равно сумме подведенного к ней количества теплоты  $\Delta Q$  и совершенной ей работы  $\Delta A$ . Количеством переданной системе теплоты называется энергия, переданная макроскопической системе в процессе хаотических молекулярных столкновений. Теплота и работа зави-

сят от процесса, который происходит с системой, и могут быть как положительными, так и отрицательными.

Работа, совершенная системой в равновесном процессе, в котором ее объем изменяется на бесконечно малую величину  $\Delta V$ , равна

$$\Delta A = p\Delta V,$$

где  $p$  - давление в системе в рассматриваемом процессе, которое можно считать неизменным в силу малости изменения объема.

Работа, совершенная макроскопической системой при изменении ее объема от  $V_1$  до  $V_2$  определяется площадью под графиком зависимости давления от объема (см. рис. 1 а) или интегралом от

давления по объему  $A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV$ , причем при расширении систе-

ма совершает положительную работу, при сжатии отрицательную. Работа газа в циклическом процессе, изображенном на рис. 1 б, – площадь внутренней области. Работа системы в изобарическом процессе определяется соотношением  $A = p(V_2 - V_1)$ .

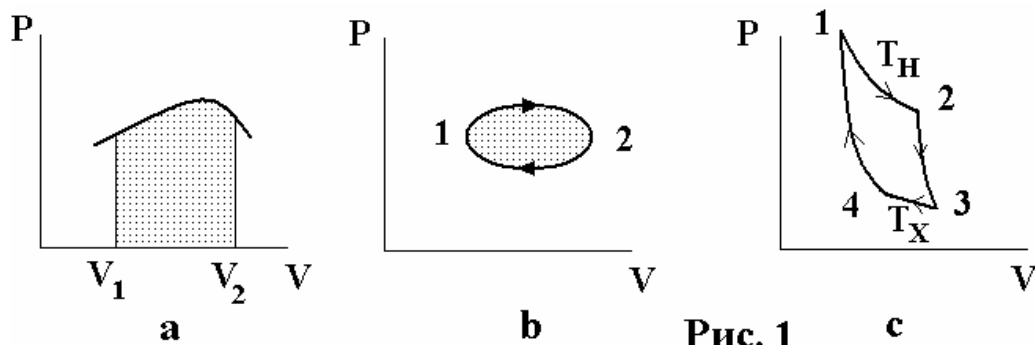


Рис. 1

*Теплоемкостью тела* называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, необходимому для того, чтобы нагреть это тело на один градус

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Удельная  $\tilde{c}$  и молярная  $c$  теплоемкости - это теплоемкости единицы массы и одного моля однородного вещества:  $\tilde{c} = C/m$ ,  $c = C/\nu = \mu\tilde{c}$ , где  $m$ ,  $\mu$  и  $\nu = m/\mu$  - масса тела, молярная масса вещества и число молей вещества, из которого состоит тело. Поскольку количество переданной макроскопической системе теплоты зависит от процесса, происходящего с системой, для нагревания системы на одну и ту же величину  $\Delta T$  в разных процессах

требуется разное количество тепла. Поэтому теплоемкость одной и той же макроскопической системы в разных тепловых процессах - разная. Например, молярные теплоемкости одноатомного идеального газа в изохорическом, изобарическом и изотермическом процессах равны

$$c_V = \frac{3}{2}R; \quad c_P = \frac{5}{2}R; \quad c_T = \infty.$$

*Второй закон термодинамики* определяет направление тепловых процессов. Он говорит о необратимости тепловых процессов: «самопроизвольный переход тепла от горячего тела к холодному возможен, обратный процесс перехода тепла от холодного тела к горячему запрещен». Другая эквивалентная формулировка этого закона утверждает, что невозможен такой периодический процесс, единственным результатом которого явилось бы совершение работы за счет теплоты, взятой у какого-то одного тела.

Важным объектом применения термодинамики являются тепловые двигатели, в которых внутренняя энергия тел превращается в работу. В основе работы теплового двигателя лежит любой циклический процесс, проходящий с идеальным газом (см. 1 б). Этот график «обходится» против часовой стрелки, так как газ совершает большую работу при расширении, чем над ним при сжатии. Согласно второму закону термодинамики, любой процесс получения работы за счет внутренней энергии требует наличия хотя бы двух тел с разной температурой (нагреватель и холодильник), причем в работу может быть превращена только часть взятой у нагревателя внутренней энергии. В связи с этим вводят понятие *коэффициента полезного действия теплового двигателя*, как доли превращенной в работу энергии, взятой у нагревателя

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H},$$

где  $A$  - работа двигателя за один цикл процесса;  $Q_H$  - энергия, взятая двигателем за один цикл у нагревателя,  $Q_X$  - энергия, отданная за один цикл холодильнику.

Максимально возможный КПД достигается в тепловых машинах, работающих по т.н. *циклу Карно*. Этот цикл (см. рис. 1с) состоит из двух изотерм, характеризующихся температурами на-

гревателя  $T_H$  и температурой холодильника  $T_X$ , и двух адиабат (участки 2-3 и 4-1) *Адиабатическим* называется процесс, происходящий без теплообмена системы с окружающей средой ( $\Delta Q = 0$ ). Уравнение этого процесса  $PV^\gamma = const$ , где  $\gamma = c_p / c_v$ . Молярная теплоемкость идеального газа в этом процессе  $c_Q = 0$ . КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{T_H - T_X}{T_H}.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа  $\Delta U$  можно выразить через молярную теплоемкость при постоянном объеме  $c_v$   
 $\Delta U = \nu c_v \Delta T$ .

## 9.2. ЗАДАЧИ

1. Тепловая машина, рабочим телом которой является 1 моль одноатомного идеального газа работает по циклу, изображенному на рис. 2. Определить КПД.

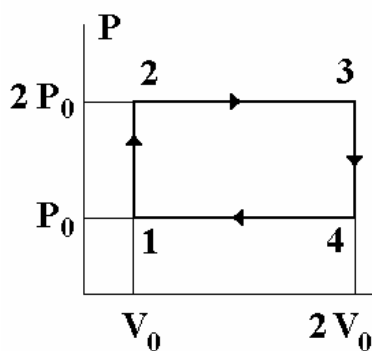


Рис. 2

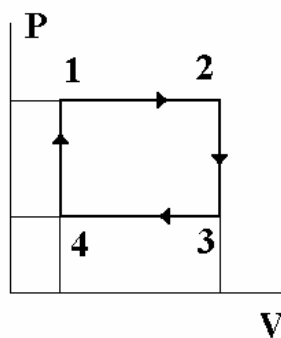


Рис. 3

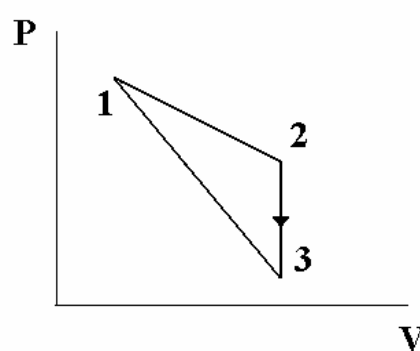


Рис. 4

2. В цилиндрическом сосуде, разделенном свободно перемещающимся поршнем на две части, находится по одному молю идеального одноатомного газа. Температура газа в левой части сосуда поддерживается постоянной. Найти теплоемкость газа в правой части сосуда при положении поршня, когда он делит сосуд пополам. Поршень тепла не проводит.
3. Параметры одного моля идеального одноатомного газа изменяются по циклическому процессу, состоящему из двух изобар и двух изохор, в направлении 1-2-3-4-1 (рис. 3). Известно, что

при изобарическом расширении объем увеличился вдвое. Температура в конце изобарического процесса 1-2  $T_2$ , а в конце изохорического процесса 2-3  $T_3$ . Определить КПД цикла.

4. Над молекулами одноатомного газа совершают замкнутый процесс (рис. 4), причем работа, совершенная в результате этого процесса  $A=2026$  Дж. Процесс состоит из участка (1-2), в котором давление является линейной функцией объема, изохоры (2-3) и процесса (3-1), в котором теплоемкость считается постоянной. Найдите эту теплоемкость, если  $T_1 = T_2 = 2T_3 = 400$  К и  $V_2/V_1 = 8$ .
5. Параметры идеального газа изменяются по циклическому процессу, состоящему из двух изохор и двух изобар, в направлении 1-2-3-4-1 (рис. 5). Температура в точках 1 и 3 равна, соответственно,  $T_1$  и  $T_3$ . Определить работу, совершаемую газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.
6. Определить КПД тепловой машины, работающей по циклу 1-3-4-1 (рис. 6), если КПД машины, работающей по циклу 1-2-3-4-1, равен  $\eta$ .

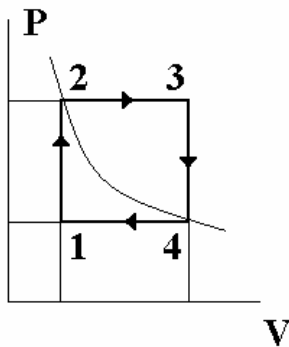


Рис. 5

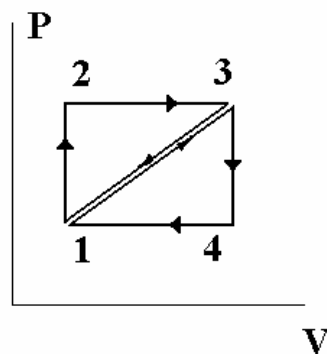


Рис. 6

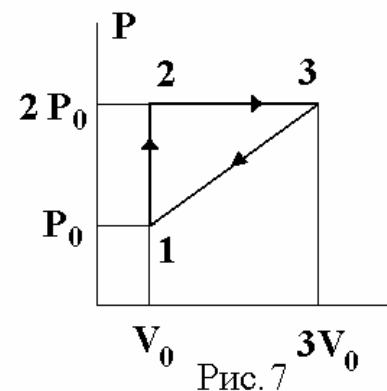


Рис. 7

7. Подсчитать КПД для цикла 1-2-3-1, изображенного на диаграмме рис. 7. Рабочее тело – идеальный одноатомный газ.
8. Над идеальным одноатомным газом произведен замкнутый процесс 1-2-3-1 (рис. 8). Известно, что работа, совершаемая газом в этом процессе, в 9 раз меньше количества теплоты, отдаваемой газом на участке 3-1. Чему равен КПД цикла?
9. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ охлаждают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (рис. 9). При этом от газа отводится количество теплоты  $Q$  ( $Q > 0$ ). Затем газ расширяется в процессе 2-3, когда его давление прямо пропорционально

объему, совершая работу  $A_{23}$ . Наконец, газ расширяется в адиабатическом процессе 3-1. Найти работу  $A_{31}$ , совершенную газом в процессе адиабатического расширения.

10. КПД цикла 1-2-3-4-1 рис. 6 равен  $\eta$ . Найти отношение КПД цикла 1-2-3-1 к КПД цикла 1-3-4-1.

11. В длинном горизонтальном, теплоизолированном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой  $M$ , находится 1 моль идеального одноатомного газа (рис. 11). Газ нагревают. Поршень, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость  $v$ . Найти количество теплоты  $Q$ , сообщенной газу. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением пренебречь.

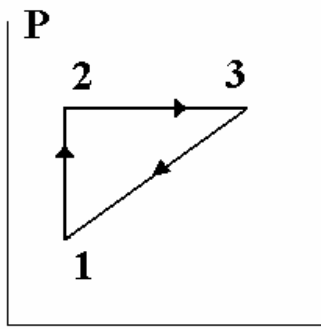


Рис. 8

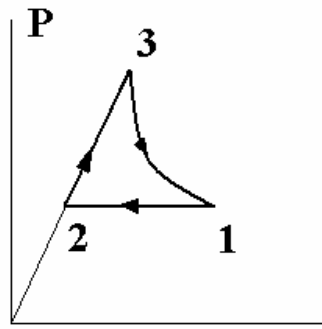


Рис. 9

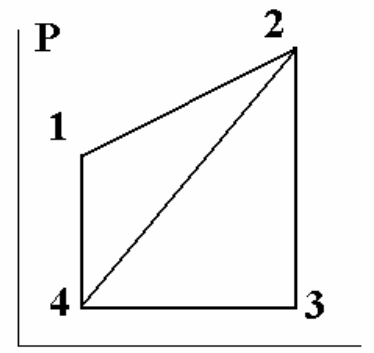


Рис. 10

12. В вертикальном неподвижном теплоизолированном цилиндрическом сосуде с площадью поперечного сечения  $S$  под поршнем массы  $M$  содержится один моль идеального одноатомного газа (рис. 12). В некоторый момент времени под поршнем включают нагреватель, передающий газу в единицу времени количество теплоты  $q$ . Атмосферное давление  $p_0$ . Определить установившуюся скорость перемещения поршня  $v$ . Считать, что расширение газа после начала движения поршня происходит при постоянном давлении. Трением, теплоемкостью цилиндра и поршня пренебречь.

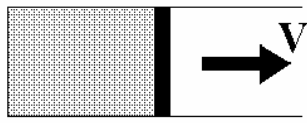


Рис. 11

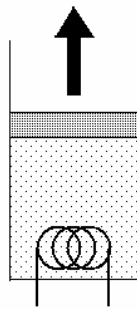


Рис. 12

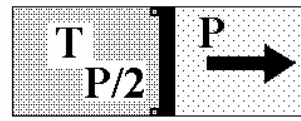


Рис. 13

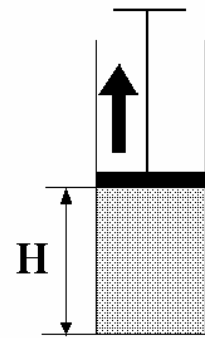


Рис. 14

13. В горизонтальном закрытом цилиндрическом сосуде длиной  $L$  находится тонкий поршень, соединенный с правой торцевой стенкой цилиндра пружиной жесткостью  $k$ . Длина недеформированной пружины равна длине сосуда. В пространство между левой стенкой сосуда и поршнем вводят один моль идеального одноатомного газа. При этом поршень устанавливается в таком положении, что длина пружины равна  $1/3$  длины сосуда. Затем газ охлаждают. При этом поршень устанавливается в таком новом положении, что длина пружины равна двум третям длины сосуда. Найти количество тепла  $Q$ , отведенное от газа в процессе охлаждения. Теплоемкостью сосуда и поршня, трением, а также массами поршня и пружины пренебречь.
14. В длинном горизонтальном теплоизолированном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом легким поршнем, содержится один моль идеального одноатомного газа при давлении в два раза меньшем внешнего давления  $P_0$  и температуре  $T$  (рис. 13). Поршень может свободно перемещаться, увеличивая вместимость сосуда, и удерживается стопором от движения в противоположную сторону. Какое количество тепла  $Q$  следует подвести к газу, чтобы его объем увеличился в два раза? Трением, теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.
15. В неподвижном теплоизолированном цилиндрическом вертикальном сосуде на высоте  $H$  от дна висит на нити поршень массой  $M$  (рис. 14). Под поршнем находится один моль идеального одноатомного газа, давление которого вначале равно внешнему давлению, а температура равна  $T_0$ . Какое количество теплоты  $Q$  нужно подвести к газу, чтобы поршень поднялся до высоты  $2H$ ? Считать, что расширение газа после начала движения поршня происходит при постоянном давлении. Трением, теп-



- лоемкостью цилиндра и поршня пренебречь.
16. В трубе между двумя поршнями массой  $M$  каждый находится один моль идеального газа, масса которого много меньше массы поршней. В начальный момент значения параметров газа  $p_0$  и  $V_0$ , а поршни имеют равные по величине скорости  $v$ , направленные навстречу друг другу. Определить максимальную температуру газа при дальнейшем движении поршней по инерции. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршней и трубы, внешним давлением пренебречь.
  17. Считая известной молярную теплоемкость газа при постоянном объеме  $c_v$ , вывести формулы для величины молярной теплоемкости идеального газа для процессов, описываемых законами: а)  $p = \alpha/T$ ; б)  $V = \alpha T^2$ ; в)  $P = \alpha V$ .
  18. Из баллона, содержащего водород под давлением 1 МПа при температуре 290 К выпустили половину находящегося там газа. Считая процесс адиабатическим, определить конечные температуру и давление. Как изменилась внутренняя энергия газа в баллоне?
  19. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный газ имеет температуру  $T_0$ . В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру  $T$  будет иметь газ в сосуде после его заполнения?
  20. Закрытый с торцов теплоизолированный цилиндрический сосуд перегороден подвижным поршнем массы  $M$ . С обеих сторон от поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа. Масса сосуда  $m$ . Коротким ударом сосуду сообщают скорость  $v$ ? На сколько изменится температура газа после затухания колебаний поршня? Трением между поршнем и стенками сосуда, а также теплоемкостью поршня пренебречь.

### 9.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** КПД цикла 1-2-4-1 рис. 10 равен  $\eta_1$ . КПД цикла 4-2-3-4 равен  $\eta_2$ . Найти КПД цикла 1-2-3-4-1.

По определению  $\eta = A/Q_H$ , где  $A$  - работа, совершенная газом в процессе 1-2-3-4-1 (численно равная площади внутри цикла

1-2-3-4-1),  $Q_H$  - тепло, полученное газом от нагревателя. Это тепло подводится к газу только на участках 4-1 и 1-2, поэтому представим  $Q_H$  следующим образом:  $Q_H = q_{41} + q_{12}$ . Аналогично  $\eta_1 = A_1 / (q_{41} + q_{12})$ ,  $\eta_2 = A_2 / q_{42}$  и  $A = A_1 + A_2$ .

Запишем первый закон термодинамики  $\Delta Q = \Delta A + \Delta U$ . Поскольку внутренняя энергия газа является функцией состояния, она не меняется, если мы совершим полный обход контура с возвращением в исходную точку. Взяв в качестве исходной точки точку 1 и совершив обход контура 1-2-4-1, имеем

$$q_{12} - q_{42} + q_{41} = A_1.$$

Дополним это уравнение уравнениями

$$A_2 = \eta_2 q_{42},$$

$$A_1 = \eta_1 (q_{12} + q_{41}),$$

$$A_1 + A_2 = \eta (q_{12} + q_{41})$$

Решение системы дает окончательный ответ

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2.$$

**Пример 2.** В вертикальном закрытом цилиндрическом сосуде находится тонкий поршень, соединенный пружиной с верхней торцевой стенкой цилиндра. Длина недеформированной пружины равна трети длины сосуда. В верхнюю часть вводят один моль идеального одноатомного газа. Поршень при этом устанавливается посередине сосуда. Затем газ нагревают, сообщая ему количество тепла  $Q$ . При этом поршень устанавливается в таком новом положении, что длина пружины равна двум третям длины сосуда. Найти конечную температуру газа. Теплоемкостью сосуда и поршня, трением, а также массами поршня и пружины пренебречь.

Три последовательных этапа растяжения пружины изображены на рис.15.

Пусть  $S$  – площадь поршня,  $P_1, T_1$  и  $P_2, T_2$  - давление и температура газа на рисунках 15 б и 15 в. Длина ненапряженной пружины  $l$ . Сила упругости растянутой пружины (в соответствии с законом Гука) на этих рисунках  $k(l/2 - l/3) = kl/6$  и  $k(2l/3 - l/3) = kl/3$ . Записав условия равновесия пружины в положениях 15 б и 15 в,

$$P_1 S = kl/6,$$

$$P_2 S = kl/3, \quad (1)$$

а также соответствующие уравнения Клапейрона-Менделеева

$$P_1 l S / 2 = RT_1, \quad (2)$$

$$P_2 2l S / 3 = RT_2,$$

имеем  $2P_1 = P_2$  и  $T_1 = 3T_2/8$ .

Согласно первому закону термодинамики

$$Q = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \left( \frac{k l^2}{2 \cdot 9} - \frac{k l^2}{2 \cdot 36} \right),$$

где первое слагаемое справа – изменение внутренней энергии одного моля газа, второе – механическая работа, совершаемая газом, равная изменению  $\Delta W$  энергии растянутой пружины (мы учли, что  $\Delta W = k \Delta x^2 / 2$ , где  $\Delta x$  – удлинение пружины по сравнению с ее длиной в ненапряженном состоянии). Исключая  $T_1$  из последнего уравнения, имеем

$$Q = \frac{15}{16}RT_2 + \frac{kl^2}{24}.$$

Воспользовавшись еще раз уравнениями (1) и (2), из последнего

уравнения нетрудно получить, что  $T_2 = \frac{8Q}{9R}$ .

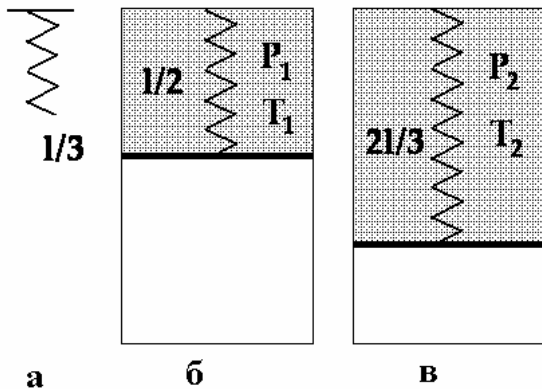


Рис. 15

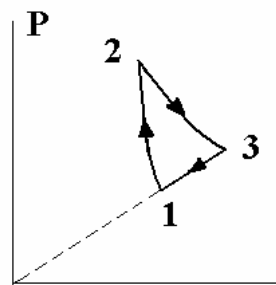


Рис. 16

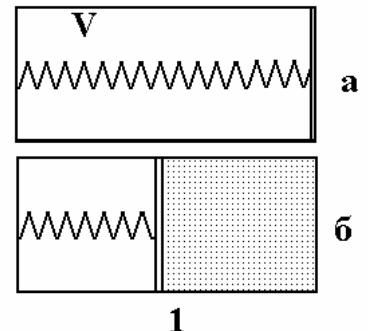


Рис. 17

**Пример 3.** Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ сжимают в адиабатическом процессе, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (рис.16). Над газом совершается при этом работа сжатия  $A_{12} > 0$ . Затем газ расширяется в изотермическом процессе 2-3 и, наконец, из состояния 3 газ переводят в состояние 1 в процессе, когда его давление  $P$  прямо пропорционально объему  $V$ . Найти работу  $A_{23}$ , которую со-

вершил газ при изотермическом расширении, если во всем замкнутом цикле 1-2-3-1 он совершил работу  $A$ .

Совершим обход по замкнутому контуру 1-2-3-1. Так как внутренняя энергия идеального газа, являясь функцией состояния, при этом не меняется, из первого начала термодинамики следует

$$Q_{23} - Q_{31} = A, \quad (1)$$

где  $Q_{23} > 0$  - тепло, полученное газом на участке 2-3,  $Q_{31} > 0$  - тепло, отведенное от газа на участке 3-1. Мы учли, что на участке 1-2, соответствующем адиабатическому процессу, газ не обменивается теплом с окружающей средой.

Полная работа газа за цикл

$$A = A_{23} - A_{31} - A_{12}, \quad (2)$$

где все работы с правой части предполагаются положительными.

Учтем, что  $Q_{23} = A_{23}$ , поскольку переход 2-3 изотермический и внутренняя энергия газа не меняется. В результате из уравнений (1)-(2) следует, что

$$Q_{31} = A_{31} + A_{12}. \quad (3)$$

Нам потребуется молярная теплоемкость газа на участке 3-1. Вычислим ее.

По определению молярная теплоемкость

$$c = \frac{dQ}{dT} = \frac{dA + dU}{dT}, \quad (4)$$

где  $dQ$  - подведенное к газу тепло,  $dA$  - работа, совершенная газом,  $dU$  - изменение его внутренней энергии,  $dT$  - изменение температуры. Продолжим соотношение (4)

$$c = \frac{pdV + c_V dT}{dT} = p \frac{dV}{dT} + c_V, \quad (5)$$

где  $c_V = 3R/2$  - молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Учитывая, что на участке 1-3

$$p = \alpha V, \quad (6)$$

где  $\alpha$  некоторая постоянная, продифференцируем уравнение Клапейрона-Менделеева

$$pV = RT.$$

В результате

$$2\alpha V dV = R dT.$$

Отсюда

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{2\alpha V}$$

и с учетом (4) и (5)

$$c = \frac{pR}{2\alpha V} + c_V = \frac{\alpha VR}{2\alpha V} + c_V = 2R. \quad (7)$$

Используя (7), тепло, отведенное от газа на участке 3-1, можно представить в виде

$$Q_{31} = \nu R \Delta T, \quad (8)$$

где  $\nu$  - число молей, и  $\Delta T$  - разница температур между точкой 1 и изотермой 2-3.

Используя (8), перепишем соотношение (3) в виде

$$2\nu R \Delta T = A_{31} + \frac{3}{2} \nu R \Delta T.$$

Мы учли, что на участке 1-2  $Q_{12} = 0$ , т.е.

$$A_{12} = U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \quad (9)$$

где  $U_{12}$  - изменение внутренней энергии газа на это участке.

Таким образом,

$$A_{31} = \nu \frac{R}{2} \Delta T. \quad (10)$$

Из соотношений (9)-(10) следует, что  $A_{12} = 3A_{31}$ .

В результате уравнение (2) можно переписать в виде

$$A = A_{23} - \frac{1}{3} A_{12} - A_{12}$$

и

$$A_{23} = A + \frac{4}{3} A_{12}.$$

**Пример 4.** *Замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части свободно перемещающимся поршнем, прикрепленным с помощью пружины к левому торцу сосуда. В левой части сосуда – вакуум, в правой – моль идеального газа. Найти теплоемкость газа, находящегося в таких условиях. Недеформированное состояние пружины соответствует положению поршня у правого торца сосуда.*

Запишем уравнение состояния газа в правой половине сосуда

$$\frac{pLS}{2} = RT, \quad (1)$$

где  $p$  - давление газа,  $L$  - длина цилиндра,  $S$  - площадь поршня,  $T$  - температура газа. Условие механического равновесия газа за поршнем и сжатой пружиной имеет вид

$$pS = k \frac{L}{2}, \quad (2)$$

где  $k$  - коэффициент жесткости пружины.

Рассмотрим воображаемый процесс растяжения пружины из состояния б) в состояние а) (рис. 17). В состоянии а) объем, занимаемый газом, нулевой, также, как и его температура. В соответствие с первым началом термодинамики отведенное при этом от газа тепло  $Q = cT$  ( $c$  - искомая теплоемкость газа) равно работе пружины  $k(L/2)^2/2$  и изменению внутренней энергии газа  $\Delta U = c_v T$ , где  $c_v = 3R/2$  - теплоемкость газа при постоянном объеме

$$cT = \frac{kL^2}{8} + \frac{3}{2}RT. \quad (3)$$

Используя (1) и (2), из (3) нетрудно получить, что  $c = 2R$ .

## 10. ПРИЛОЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

### 10.1. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность.

При испарении жидкости часть молекул покидает ее и переходит в газообразное состояние. В результате над поверхностью жидкости образуется пар. Из-за хаотического характера движения молекулы пара снова могут вернуться в жидкость. Таким образом, наряду с процессом испарения всегда идет обратный процесс конденсации. Поскольку интенсивность процесса конденсации растет с ростом концентрации молекул пара, при некоторой концентрации интенсивности испарения и конденсации совпадают. Это означает, что при этой температуре наступает динамическое равновесие жидкости и пара: сколько молекул выходит из жидкости в пар, столько же переходит обратно из пара в жидкость. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным*. Очевидно,

давление насыщенного пара является максимальным давлением, которое может иметь пар при данной температуре. Давление насыщенного пара является функцией температуры.

При давлении порядка атмосферного и температуре порядка комнатной насыщенный водяной пар можно с хорошей степенью точности считать идеальным газом и применять к нему уравнение Клапейрона-Менделеева. При этом следует иметь в виду, что давление пара не может стать больше давления насыщенного пара при данной температуре, поэтому при рассмотрении насыщенного пара необходимо учитывать возможность его конденсации. В частности, при изотермическом сжатии давление насыщенного пара остается неизменным, а излишек пара конденсируется. При охлаждении пара также возможна его частичная конденсация.

Воздух, содержащий водяной пар, называют влажным. Давление влажного воздуха складывается из парциальных давлений сухого воздуха  $p_c$  и водяного пара  $p_{\Pi}$ , т.е.

$$p = p_c + p_{\Pi}.$$

Количество пара в воздухе характеризуется абсолютной и относительной влажностью. *Абсолютная влажность* определяется как плотность паров воды в воздухе. *Относительная влажность  $\alpha$*  равна отношению плотности паров воды в воздухе к плотности насыщенных паров  $\rho_{\text{нп}}$  при данной температуре (или, что эквивалентно, отношению парциального давления пара к давлению насыщенного пара  $p_{\text{нп}}$ )

$$\alpha = \frac{\rho_{\Pi}}{\rho_{\text{нп}}} = \frac{p_{\Pi}}{p_{\text{нп}}}.$$

Относительная влажность – величина безразмерная и всегда меньше единицы. Часто эту величину выражают в процентах.

## 10.2. Поверхностное натяжение. Капиллярные явления

На поверхности жидкости, вблизи границы, разделяющей жидкость и ее пар, молекулы испытывают межмолекулярное взаимодействие не такое, как молекулы, находящиеся внутри объема жидкости. Так как силы притяжения молекулы жидкости к молекулам пара в среднем значительно слабее сил взаимодействия с другими молекулами жидкости, то на молекулы, расположенные в по-

верхностном слое жидкости, действует направленная внутрь жидкости равнодействующая сил взаимодействия.

Для перенесения молекул из глубины объема жидкости в ее поверхностный слой необходимо совершить работу по преодолению указанной выше силы. Эта работа идет на увеличение *поверхностной энергии*. Так называется избыточная энергия  $W_{\text{п}}$ , которой обладают молекулы в поверхностном слое по сравнению с их энергией внутри объема жидкости:

$$W_{\text{п}} = \sigma S,$$

здесь  $S$  — площадь свободной поверхности жидкости на границе раздела жидкости и газа,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения.

На границе соприкосновения жидкости с твердыми телами наблюдается явление *смачивания*, проявляющееся в искривлении свободной поверхности жидкости около твердой стенки сосуда. Поверхность жидкости, искривленная на границе с твердым телом, называется *мениском*. Линия, по которой мениск пересекается с твердым телом, называется периметром смачивания. Явление смачивания характеризуется краевым углом  $\theta$  между поверхностью твердого тела и мениском в точке их пересечения, т.е. в точках периметра смачивания (рис. 1). Жидкость называется смачивающей твердое тело, если  $0 < \theta < \pi/2$ , и несмачивающей, если  $\pi/2 < \theta < \pi$ . Ситуацию, когда  $\theta = 0$ , называют полным или абсолютным смачиванием, а  $\theta = \pi$  — полным несмачиванием.



Рис. 1

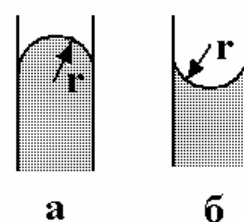


Рис. 2

Если поверхность жидкости ограничена периметром смачивания, то к жидкости приложена сила поверхностного натяжения, распределенная по периметру смачивания. Направление действия силы поверхностного натяжения — перпендикулярно периметру смачивания и по касательной к поверхности жидкости. Величина



силы поверхностного натяжения  $\Delta F_{\text{пн}}$ , действующей на участке периметра смачивания длиной  $\Delta l$ , равна

$$\Delta F_{\text{пн}} = \sigma \Delta l.$$

Искавление поверхности жидкости в результате действия сил поверхностного натяжения создает дополнительное (избыточное) давление на жидкость по сравнению с давлением под плоской поверхностью. Для сферической поверхности мениска радиусом  $r$  при краевом угле  $\theta$  дополнительное давление

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{r}.$$

Таким образом, если мениск выпуклый (рис. 2а) то  $\Delta p \geq 0$ , если мениск вогнутый (рис. 2б)  $\Delta p \leq 0$ .

Проявление сил поверхностного натяжения, действующих на жидкость, помещенную, например, в узкую трубку (капилляр), называют капиллярными явлениями.

### 10.3. Теплообмен. Фазовые переходы

Для нагревания тела массой  $m$  без совершения над этим телом работы необходимо затратить количество теплоты

$$Q = cv(T_2 - T_1),$$

где  $T_2$  и  $T_1$  конечная и начальная температуры тела соответственно,  $c$  - удельная теплоемкость вещества тела. Формула справедлива и при охлаждении тела. В этом случае величина  $Q$  является отрицательной.

Если переход к равновесному состоянию происходит в теплоизолированной системе, то одни части системы отдают, другие получают тепло. Согласно закону сохранения энергии количества отданной и полученной теплоты совпадают. Поэтому, если никакие части системы не претерпевают фазовых превращений, то

$$\sum_i c_i m_i (\Theta - T_i) = 0.$$

Суммирование производится по всем частям системы (индекс  $i$  нумерует эти части),  $\Theta$  - равновесная (установившаяся) температура. Последнее уравнение называется уравнением теплового баланса.

Любые вещества могут существовать в виде различных агрегатных состояний или фаз – твердой, жидкой, газообразной. Процессы перехода фаз друг в друга при изменении температуры и

давления называются *фазовыми превращениями*. Переход тела из одной фазы в другую сопровождается выделением или поглощением тепла благодаря изменению характера связей между молекулами и, соответственно, изменению энергии этих связей.

*Плавлением* называется переход вещества из твердого (кристаллического) состояния в жидкое, при этом поглощается количество теплоты

$$Q = \lambda t,$$

которое затрачивается на разрыв кристаллических связей. Здесь  $m$  - масса тела,  $\lambda$  - удельная теплота плавления.

Обратный процесс, называемый *кристаллизацией*, происходит с выделением тепла, количество которого определяется этой же формулой. Плавление и кристаллизация происходят при определенной для каждого вещества температуре, называемой температурой плавления.

*Испарением* называется переход из жидкого состояния в газообразное, для чего при постоянной температуре жидкости необходимо передать количество теплоты

$$Q = r m,$$

где  $m$  - масса испарившейся жидкости,  $r$  - удельная теплота парообразования.

Обратный испарению процесс называется *конденсацией* и проходит с выделением такого же количества тепла. Испарение может происходить при любой температуре за исключением абсолютного нуля. Кроме того, испарение может происходить и с поверхности твердой фазы (*сублимация*).

При наличии фазовых превращений в системе уравнение теплового баланса следует уточнить. В левую часть этого уравнения необходимо добавить количество теплоты, поглощенной или выделенной при фазовых переходах.

*Кипением* называется процесс перехода жидкости в пар с образованием пузырьков, заполненных насыщенным паром, всплывающих к поверхности жидкости. Для роста микроскопических пузырьков, которые образуются в жидкости на различных неоднородностях, необходимо, чтобы давление газа внутри пузырька, равное давлению насыщенных паров, было больше внешнего давления, близкого к атмосферному. Поэтому условие кипения жидкости в открытом сосуде имеет вид

$$p_{\text{НП}}(T) = p_{\text{АТМ}}.$$

## 10.4. ЗАДАЧИ

1. Капилляр радиусом  $r$  опускают в смачивающую жидкость с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ . На какую высоту поднимется жидкость в капилляре? Сколько тепла выделится при этом?
2. Восемь капелек ртути диаметром  $d = 1$  мм каждая сливаются в одну каплю. Сколько при этом выделяется тепла? Коэффициент поверхностного натяжения ртути  $\sigma = 0,47$  Н/м.
3. Каково поверхностное натяжение воды, если с помощью пипетки, имеющей отверстие диаметром  $d = 0,4$  мм, можно дозировать воду с точностью  $0,01$  г?
4. С какой минимальной высоты надо уронить каплю жидкости сферической формы радиусом  $R$  на несмачиваемую поверхность, чтобы она разбилась на  $N$  одинаковых сферических капель? Плотность жидкости  $\rho$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ .
5. В вертикальном закрытом капилляре радиусом  $r = 0,5$  мм находится вода, заполняющая часть капилляра длиной  $h = 20$  см. Сколько капель воды выльется из капилляра, если открыть его концы? Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 0,075$  Н/м.
6. Найти давление в пузырьке воздуха диаметром  $d = 4$  мкм, который находится в воде на глубине  $h = 5$  м. Атмосферное давление нормальное:  $p_0 = 10^5$  Па.
7. В сосуд объемом  $V = 10$  л, наполненный сухим воздухом при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  при давлении  $p_0 = 10^5$  Па, вводят  $m = 3$  г воды. Сосуд нагревают до температуры  $t = 100^\circ\text{C}$ . Какое давление установится в сосуде?
8. Относительная влажность воздуха, заполняющего сосуд объема  $V = 0,7\text{ м}^3$ , при температуре  $t = 24^\circ\text{C}$   $\alpha = 60\%$ . Какую массу воды нужно испарить в этот объем до полного насыщения пара? Давление насыщенного пара воды при этой температуре  $p = 3$  кПа.
9. Легкий подвижный поршень делит объем замкнутого сосуда на две равные части. В одной из них находится воздух, в другой - водяной пар. При медленном нагревании всего сосуда поршень начинает двигаться и в некоторый момент времени останавлива-

- ется. В этот момент он делит объем сосуда на части в отношении 1:3. Определить отношение массы воды к массе пара в начальном состоянии. Температура в обеих частях сосуда во время опыта одинаковая. Объемом, занимаемым сконденсированной водой в одной из частей сосуда, пренебречь.
10. В цилиндре объемом  $V_1 = 10$  л под поршнем находится влажный воздух при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  и давлении  $p_1 = 13,3$  кПа. Относительная влажность воздуха  $\alpha = 70\%$ . Каково будет давление  $p_2$  в цилиндре, если объем при той же температуре уменьшит в 10 раз? Давление насыщенного пара воды при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$   $p = 2,4$  кПа.
  11. В сосуде при атмосферном давлении  $p_0 = 10^5$  Па находится воздух, температура которого  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ , а относительная влажность  $\alpha = 60\%$ . На сколько изменится относительная влажность воздуха, если сосуд нагреть до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  и уменьшить объем в  $k = 3$  раз? Давление насыщенного пара воды при  $t_1 = 10^\circ\text{C}$   $p_{\text{н}} = 1224$  Па.
  12. В цилиндре под невесомым поршнем площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> находится  $m = 18$  г насыщенного водяного пара. В цилиндр впрыскивают  $M = 18$  г воды при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . На какую высоту опустится поршень? Атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей пренебречь.
  13. В калориметр налито 500 г воды при температуре  $15^\circ\text{C}$ . В воду опускают кусок льда массы 0,5 кг при температуре  $-10^\circ\text{C}$ . Найдите температуру смеси после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/кг·К, льда – 2,1 кДж/кг·К, удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг.
  14. В колбе находится вода при  $0^\circ\text{C}$ . Быстро выкачивая из колбы воздух, замораживают всю воду путем ее испарения. Какая часть воды при этом испарилась, если притока тепла извне нет? Удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота парообразования воды  $24,8 \cdot 10^5$  Дж/кг.
  15. Какая часть дистиллированной воды, переохлажденной до температуры  $-10^\circ\text{C}$ , превратится в лед, если начнется процесс кристаллизации? Теплообмен с внешней средой отсутствует. Удель-

ная теплоемкость воды  $4,2 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$ , удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ .

16. В сосуд поместили  $m_1 = 1,4 \text{ кг}$  льда при  $t_1 = -30^\circ \text{C}$  и  $m_2 = 600 \text{ г}$  водяного пара при  $t_2 = 120^\circ \text{C}$ . Давление в сосуде атмосферное, сосуд теплоизолирован и его теплоемкостью можно пренебречь. Определить установившуюся температуру смеси. Удельная теплоемкость воды  $4,2 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$ , удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , удельная теплота парообразования воды  $2,2 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ , удельная теплоемкость льда  $2,1 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$ , удельная теплоемкость пара  $2,2 \text{ кДж/кг}\cdot\text{К}$ .
17. Установка, выделяющая мощность  $N = 40 \text{ кВт}$ , охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке диаметром  $d = 15 \text{ мм}$ . В установившемся режиме проточная вода нагревается на  $\Delta t = 15^\circ \text{C}$ . Определить скорость воды, предполагая, что вся выделяемая мощность установки идет на нагрев воды. Удельная теплоемкость воды  $C_e = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ .
18. В кастрюлю налили холодную воду ( $t = 10^\circ \text{C}$ ) и поставили на электроплитку. Через какое время вода полностью испарится, если закипает она через  $\tau = 10 \text{ минут}$ . Удельная теплоемкость воды  $C = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Удельная теплота парообразования  $r = 2,48 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ .
19. Сколько льда образуется из переохлажденной до  $t_1 = -10^\circ \text{C}$  воды. Какую температуру должна иметь переохлажденная вода, чтобы она целиком превратилась в лед? Удельная теплоемкость воды  $C = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ , льда  $c_1 = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$ .
20. Свинцовая пуля, летящая горизонтально со скоростью  $v_1 = 400 \text{ м/с}$ , пробивает доску на высоте  $h = 1 \text{ м}$  над поверхностью земли. На каком расстоянии  $S$  от доски пуля упадет на землю, если при движении внутри доски она нагрелась на  $\Delta T = 150 \text{ К}$ ? Пуля получает  $\eta = 60\%$  количества теплоты, выделившейся при ее движении внутри доски. Удельная теплоемкость свинца  $C = 0,13 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ .

## 10.5. Примеры решения задач

**Пример 1.** *Какое максимальное количество капель ртути радиусом  $r$ , лежащих на гладкой горизонтальной поверхности, могут слиться в одну большую каплю?*

Запишем закон сохранения механической энергии рассматриваемой системы (рис. 3) в начальном и конечном состояниях

$$Nmgr + N\sigma 4\pi r^2 = MgR + \sigma 4\pi R^2,$$

где  $m$  и  $M$  - массы маленьких и большой капли,  $r$  и  $R$  их радиусы. Первые слагаемые слева и справа – потенциальные энергии маленьких и большой каплей в поле силы тяжести (энергия отсчитывается от уровня земли), вторые слагаемые – поверхностные энергии капель. Массы капель связаны с их радиусами соотношениями

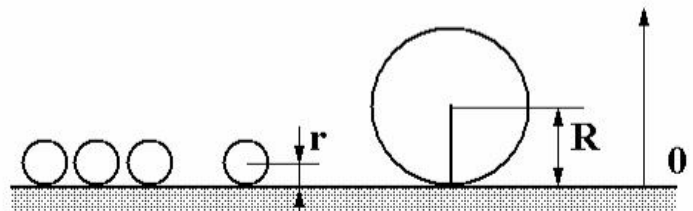


Рис. 3

$$m = 4/3\rho\pi r^3, \quad M = 4/3\rho\pi R^3,$$

где  $\rho$  - плотность ртути.

Закон сохранения объема дает еще одно соотношение

$$R = N^{1/3}r.$$

В результате

$$N = \left( \frac{3\sigma}{\rho gr^2} \right)^3.$$

**Пример 2.** *Легкий подвижный теплопроводящий поршень делит объем вертикального цилиндра на две части. Под поршнем находятся в равновесии жидкость и ее пар, температура которых поддерживается постоянной и равной  $T_0$ . Над поршнем находится газообразный гелий. К жидкости и пару подводится тепло  $Q$ . При этом часть жидкости испаряется и пар совершает работу  $A$ . Найти удельную теплоту испарения жидкости. Молярная масса пара  $\mu$ .*

Первое начало термодинамики в применении к теплу  $Q$ , подведенному к нижней половине цилиндра, выглядит следующим образом

$$Q = A + r\Delta m, \tag{1}$$

где  $\Delta m$  - масса испарившейся воды и  $r$  - удельная теплота парообразования.

Работу  $A$ , совершенную насыщенным паром, можно представить в виде

$$A = p_H \Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT_0, \quad (2)$$

где  $p_H$  - давление насыщенного пара при температуре  $T_0$  и  $\Delta V$  - изменение нижнего объема.

Решая систему уравнений (1)-(2), имеем

$$r = \frac{(Q - A)RT_0}{\mu A}.$$

**Пример 3.** Легкий подвижный поршень делит объем замкнутого сосуда на две части в отношении 4:1. В одной из частей находится

воздух, в другой - водяной пар. При медленном охлаждении всего сосуда поршень в некоторый момент начинает двигаться. Какая часть пара сконденсируется к тому моменту, когда поршень делит объем сосуда на части в отношении 1:1? Температура в обеих частях сосуда во время опыта одинаковая. Объем, забираемый сконденсированной водой, мал.

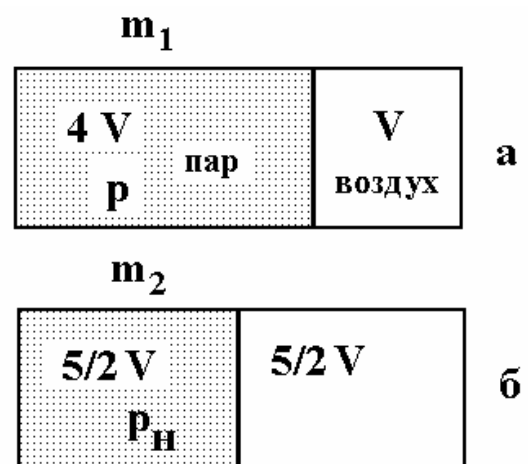


Рис. 4

Два положения поршня показаны на рис. 4 а и б. В левой части сосуда находится водяной пар, в правой – воздух. Давление пара на рис. 4 а -  $P$ , на рис. 4 б пар насыщенный и его давление  $P_H$ . Давление воздуха справа также  $P$  и  $P_H$  соответственно. Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для двух рассматриваемых состояний пара

$$p4V = \frac{m_1}{\mu} RT_1, \quad (1)$$

$$p \frac{5}{2} V = \frac{m_2}{\mu} RT_2, \quad (2)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  - температуры системы в состояниях  $a$  и  $b$ ,  $\mu$  - молярная масса водяного пара,  $m_1$  и  $m_2$  - масса водяных паров в рассматриваемых состояниях.

Уравнение перехода воздуха из состояния  $a$  в состояние  $b$  имеет вид

$$\frac{pV}{T_1} = \frac{p_H 5V}{2T_2}. \quad (3)$$

Из системы уравнений (1)-(3) нетрудно получить, что  $m_1/m_2 = 4$ . Масса сконденсировавшегося пара составляет

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1} = 75\%$$

от первоначальной массы.

## 11. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### 11.1. Основные положения

При определенных условиях тела электризуются, т.е. приобретают свойство вступать в электромагнитные взаимодействия. Физическая величина, характеризующая это свойство тел или частиц и определяющая значение сил и энергий при таких взаимодействиях, называется электрическим зарядом.

Электрические заряды делятся на положительные и отрицательные (одноименно заряженные тела или частицы отталкиваются, разноименно заряженные — притягиваются).

Электрический заряд

- величина, независимая от скорости движения носителя заряда.

- величина, аддитивная, т.е. заряд любой системы тел равен сумме зарядов тел, входящих в систему.

- имеет дискретную природу, т.е. заряд любого тела кратен элементарному заряду, равному по величине заряду элементарных частиц — электрона и протона.

При всех явлениях, связанных с перераспределением электрических зарядов в изолированной системе взаимодействующих тел, алгебраическая сумма электрических зарядов остается постоянной (*закон сохранения электрического заряда*).



Силы электростатического взаимодействия (неподвижных в инерциальной системе отсчета тел) зависят от формы, размеров заряженных тел и характера распределения зарядов на этих телах. В случае неподвижных точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , а также заряженных тел шарообразной формы, если их заряды  $q_1$  и  $q_2$  распределены равномерно по объему или по поверхности этих тел, справедлив *закон Кулона*: силы  $F$  электростатического взаимодействия между зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , находящимися в вакууме, прямо пропорциональны величинам зарядов, обратно пропорциональны квадрату расстояния  $r$  между ними (между их центрами в случае шарообразной формы взаимодействующих тел) и направлены по прямой, соединяющей эти заряды (центры шарообразных тел):

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где -  $k = 1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$  - постоянная закона Кулона в системе единиц СИ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н} \cdot \text{м}^2$  (Ф/м) - электрическая постоянная.

Сила электростатического взаимодействия точечных зарядов или равномерно заряженных шаров в однородном и бесконечном, газообразном или жидком диэлектрике

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2},$$

где  $\epsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Для описания дальнего действия электромагнитного взаимодействия вводится понятие поля. Силовой характеристикой электрического поля является *вектор напряженности поля*

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q},$$

где  $\mathbf{F}$  - сила, действующая на «пробный» заряд  $q$ , помещенный в данную точку поля (пространства).

Для графического изображения электростатического поля используют метод силовых линий. *Силовые линии* (линии напряженности) представляют собой воображаемые кривые линии, касательные к которым в любой точке совпадают с направлением вектора  $\mathbf{E}$  в этой точке поля. Силовые линии непрерывны, они начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных заря-

дах или уходят в бесконечность. Силовые линии нигде не пересекаются.

Энергетической характеристикой электростатического поля является его *потенциал* - скалярная величина, равная

$$\varphi = \frac{W}{q},$$

где  $W$  — потенциальная энергия «пробного» заряда  $q$ , помещенного в данную точку поля.

Точечный заряд  $q$ , помещенный в бесконечный однородный жидкий или газообразный диэлектрик, создает в окружающем пространстве поле, для которого

$$E = k \frac{q}{\varepsilon r^2},$$

$$\varphi = k \frac{q}{\varepsilon r},$$

где  $r$  - расстояние от данной точки пространства до точечного заряда.

Внутри шара радиусом  $R$  с равномерно распределенным по его поверхности зарядом  $q$   $E = 0$ , а потенциал постоянен и равен

$$\varphi = k \frac{q}{R}.$$

Геометрическое место точек электростатического поля с одинаковыми потенциалами называется *эквипотенциальной поверхностью*. В каждой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности поля перпендикулярен к ней, а работа по перемещению электрического заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю.

*Принцип суперпозиции:* напряженность  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\varphi$  поля системы  $N$  зарядов  $q_1 \dots q_i \dots q_N$  (не обязательно точечных) в данной точке пространства равны

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i,$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i.$$

*Потенциальная энергия* системы точечных зарядов определяется выражением:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i,$$

$\varphi_i$  - потенциал поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке пространства, где находится заряд  $q_i$ .

*Работа силы*, действующей на точечный заряд  $q$  со стороны электрического поля, при перемещении  $\Delta \mathbf{r}$

$$A = -q\Delta\varphi,$$

где  $\Delta\varphi = \varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})$ . Поскольку в однородном поле  $A = q(\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r})$ , то  $\Delta\varphi = -E\Delta r \cos\alpha$ , где  $\alpha$  - угол между вектором  $\mathbf{E}$  и вектором перемещения  $\Delta\mathbf{r}$ .

В проводниках электрическое поле вызывает движение свободных зарядов - электронов, поэтому в электростатическом случае напряженность поля внутри проводника должна быть равна нулю. Следовательно, область внутри проводника и его поверхность должны иметь одинаковый потенциал, другими словами, весь объем проводника является эквипотенциалью. Вне проводника электрическое поле не равно нулю, причем вектор  $\mathbf{E}$  должен быть перпендикулярен к поверхности проводника в каждой ее точке. Наличие касательной составляющей напряженности поля привело бы к движению свободных зарядов вдоль поверхности.

Заряды и потенциалы заряженных проводников не могут быть заданы одновременно произвольным образом. Если изолированному уединенному проводнику сообщить заряд  $q$  и его потенциал будет равен  $\varphi$ , то отношение  $q/\varphi$  остается постоянным для любых  $q$ . Величина  $C = q/\varphi$  получила название *емкости проводника*. Так как заряженный проводник можно представить в виде суммы большого количества точечных зарядов, обладающих одинаковым потенциалом, то энергия заряженного проводника

$$W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2.$$

Пару проводников, заряжаемых разноименными равными по абсолютной величине зарядами, называют *конденсатором*. Проводники, образующие конденсатор, называют обкладками. Разность потенциалов между обкладками конденсатора называют напряжением  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  конденсатора. Величина заряда на обкладках  $q$  и напряжение  $U$  связаны соотношением:

$$q = CU,$$

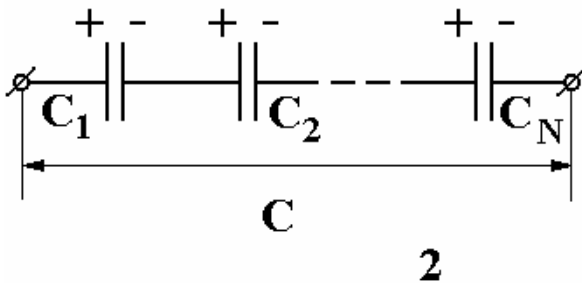
где  $C$  — емкость конденсатора.

Простейший конденсатор - плоский - представляет собой две одинаковые плоские пластины, расстояние между которыми  $d$  много меньше поперечного размера обкладок, поэтому поле между обкладками можно считать однородным. Емкость плоского конденсатора  $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ , где  $S$  - площадь поверхности обкладок,  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Энергию заряженного конденсатора - энергию электрического поля, сосредоточенного в пространстве между обкладками, можно выразить следующим образом:

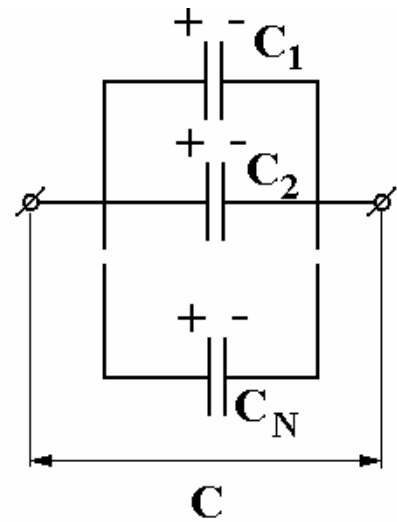
$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

При параллельном соединении конденсаторов, когда соединяют их одноименно заряженные обкладки (рис. 1), общая емкость батареи

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N.$$



**Рис. 2**



**Рис. 1**

При последовательном соединении конденсаторов соединяют их разноименные обкладки (рис. 2), при этом заряды на всех обкладках одинаковы по величине, а складываются величины, обратные емкостям

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}.$$

## 11.2. ЗАДАЧИ

1. Два шара, один радиусом  $r_1=5$  см с зарядом  $Q_1=0,1$  мкКл, другой радиусом  $r_2=10$  см с зарядом  $Q_2=2$  нКл, соединяют тонкой проволокой. Какой заряд переместится по ней? Какой будет общий потенциал шаров после соединения?
2. Восемь заряженных ртутных капелек радиусом  $r=1$  мм каждая сливаются в одну большую каплю. Найти потенциал большой капли, если заряд малой капли  $q=0,1$  нКл.
3. Две одинаковые капли ртути радиусом  $R=50$  мкм каждая, находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга. Потенциалы капель  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,15$  кВ. Капли, притягиваясь, сливаются в одну. Найти повышение температуры образовавшейся капли. Плотность ртути  $\rho=13,6$  г/см<sup>3</sup>, удельная теплоемкость  $C=0,14 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К).
4. Конденсатор емкостью  $C_1=20$  мкФ, заряженный до напряжения  $U_1=100$  В, соединили с заряженным до разности потенциалов  $U_2=40$  В другим конденсатором, емкость которого неизвестна. Определить емкость  $C_2$  второго конденсатора, если напряжение на конденсаторах после соединения оказалось  $U=80$  В. Соединяются обкладки, имеющие одноименные (разноименные) заряды.
5. С какой силой притягиваются друг к другу пластины заряженного плоского конденсатора, емкость которого  $C$ , а разность потенциалов  $U$ ? Расстояние между пластинами  $d$ .
6. Между обкладками плоского конденсатора находится стеклянная пластина ( $\varepsilon=7$ ). Напряжение на конденсаторе  $U=1$  В, емкость  $C=4$  мкФ. Конденсатор отсоединили от источника. Какую нужно совершить работу, чтобы вытащить пластинку?
7. Как изменится емкость плоского конденсатора, если между его обкладками будут вдвинуты: а) пластинка из диэлектрика с  $\varepsilon=4$ ; б) пластинка из металла? Толщина каждой пластинки равна половине расстояния между обкладками.
8. Два одинаковых конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику. Во сколько раз изменится разность потенциалов на одном из них, если другой погрузить в жидкость с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ ?
9. В пространство между двумя параллельными заряженными пластинками, расстояние между которыми  $d=16$  мм, параллельно

пластинам влетает электрон со скоростью  $v_0 = 2 \cdot 10^6$  м/с. Разность потенциалов между пластинами равна  $\Delta\varphi = 4,8$  В. Найти отклонение электрона от первоначальной траектории на пути в  $S = 3$  см. Действием силы тяжести пренебречь.

10. Шар с массой  $m = 1$  кг и зарядом  $q = 2 \cdot 10^{-4}$  Кл подвешен на изолирующей нити в однородном горизонтальном электрическом поле с напряженностью  $E = 3 \cdot 10^4$  Кл, причем вектор  $E$  перпендикулярен к силе тяжести и направлен влево. Шарик отвели вправо так, что нить отклонилась на угол  $\alpha = 30^\circ$  от вертикали и отпустили. Найти силу натяжения нити при прохождении вертикального положения.
11. Шарик массой  $m = 1$  г с зарядом  $Q = 10^{-8}$  Кл перемещается из точки с потенциалом  $\varphi_1 = 60$  В в точку, потенциал которой  $\varphi_2 = 0$ . Определить скорость шарика в первой точке, если во второй она равна  $V_2 = 0,2$  м/с.
12. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд  $Q = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии  $d = 28$  см от поверхности шара радиусом  $R = 2$  см, если шар заряжен до потенциала  $\varphi = 300$  В?
13. Две одноименно заряженные частицы с зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$  и массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся с очень большого расстояния навстречу друг другу по соединяющей их линии со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Определить наименьшее расстояние  $r_{\min}$ , на которое частицы могут сблизиться.
14. Внутри полый тонкостенной сферы радиусом  $R$  находится сфера радиусом  $r$ . Первой сообщается заряд  $Q$ , а сфере радиусом  $r$  – заряд  $q$ . Определить потенциалы поверхностей сфер.
15. Металлический шар радиусом  $R_1$ , имеющий потенциал  $\varphi_1$ , окружают сферической проводящей оболочкой радиусом  $R_2$ . Чему будет равен потенциал шара, если заземлить оболочку?
16. Металлический шар радиусом  $R_1$ , имеющий потенциал  $\varphi_1$ , окружают незаряженной сферической проводящей оболочкой радиусом  $R_2$ . Как изменится потенциал шара после того, как он будет на некоторое время соединен с оболочкой?
17. Тонкое проволочное кольцо радиусом  $R$  несет электрический заряд  $q$ . В центре кольца расположен одноименный с  $q$  заряд  $Q$ , причем  $Q \gg q$ . Определить силу, растягивающую кольцо.

18. Определить напряжения на конденсаторах емкостью  $C_1$  и  $C_2$ , изображенных на рис. 3.

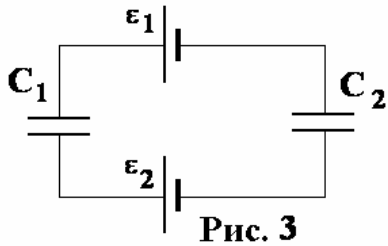


Рис. 3

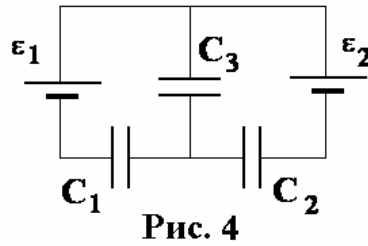


Рис. 4

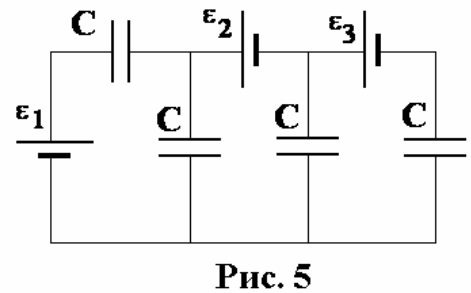


Рис. 5

19. Определить заряды на конденсаторах в схеме, показанной на рис. 4.

20. Найдите заряды конденсаторов в цепи, изображенной на рис. 5. Емкость каждого конденсатора равна  $C$ .

### 11.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** Металлический шар радиусом  $R_1 = 2$  см, заряженный до потенциала  $\varphi_1 = 30$  В, соединили тонкой длинной проволокой с шаром емкостью  $C_2 = 3$  мкФ, на котором находится заряд  $Q_2 = 6 \cdot 10^{-10}$  Кл. Каким станет потенциал шаров, если первый шар поместить в центр проводящей металлической оболочки радиусом  $R = 3$  см, соединенной с землей?

Определим характеристики поля первого шара после его соединения со вторым. Первоначальный заряд шара  $Q_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1$ , где  $4\pi\epsilon_0 R_1 = C_1$  - емкость первого шара. Соответственно заряд второго шара  $Q_2 = C_2 \varphi_2$ .

Обозначим  $Q'_1$  и  $Q'_2$  - заряды первого и второго шаров после их соединения. Закон сохранения заряда дает

$$Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2.$$

Пусть  $\varphi$  - совместный потенциал шаров после их соединения проводом. Тогда

$$4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1 + Q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi + C_2 \varphi.$$

Следовательно

$$\varphi = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_1 + C_2}$$

и

$$Q'_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \varphi.$$

Заземленная оболочка радиуса  $R$  приобретает из Земли заряд  $Q$ , который находится из условия, что ее потенциал равен нулю. Вклад в него дает заряд оболочки и заряд внутреннего шара (вкладом заряда  $Q'_2$  в потенциал можно пренебречь из-за его значительного удаления). Следовательно

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = 0.$$

Отсюда  $Q = -Q'_1$ .

Теперь определим потенциал внутри шара, находящегося внутри оболочки. Потенциал шара с емкостью  $C_2$  будет таким же, поскольку они соединены проводом. Потенциал всех точек шара один и тот же, но нам удобнее вычислить этот потенциал в центре шара. Все заряды, находящиеся на оболочке, удалены от центра шара на одно и то же расстояние  $R$ , поэтому

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \varphi \left( 1 - \frac{R_1}{R} \right).$$

**Пример 2.** Какое количество тепла выделится на резисторе с сопротивлением  $R$  после замыкания ключа  $K$  в схеме показанной на рис. 6. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

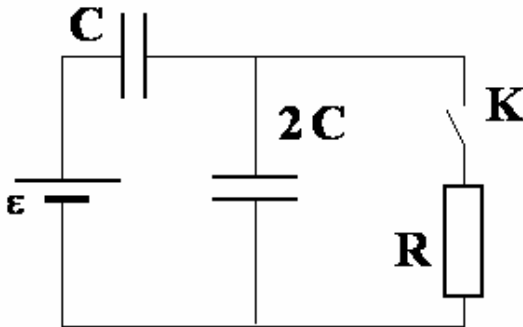


Рис. 6

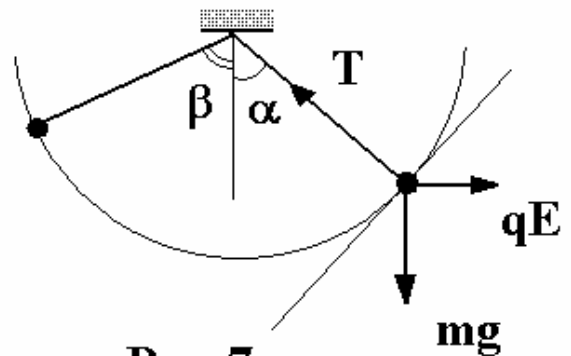


Рис. 7

До замыкания ключа  $K$  энергия электростатического поля в конденсаторах

$$W_H = \tilde{C} \frac{\epsilon^2}{2},$$



где  $\tilde{C} = 2/3C$  - эквивалентная емкость конденсаторов. После замыкания ключа конденсатор с емкостью  $2C$  оказывается незаряженным, и энергия поля становится

$$W_{\text{к}} = C \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Суммарный заряд конденсаторов до замыкания ключа

$$q_{\text{н}} = \tilde{C}\varepsilon = \frac{2}{3}C\varepsilon.$$

После замыкания:

$$q_{\text{к}} = C\varepsilon.$$

Заряд, переместившийся по цепи

$$\Delta q = \frac{1}{3}C\varepsilon.$$

Работа источника

$$A = \Delta q\varepsilon = \frac{C\varepsilon^2}{3}.$$

Она расходуется на изменение энергии поля и выделившееся тепло  $Q$ :

$$A = Q + (W_{\text{к}} - W_{\text{н}}).$$

В результате

$$Q = \frac{C\varepsilon^2}{6}.$$

**Пример 3.** *Заряженный шарик массой  $m = 1,5\text{ г}$ , прикрепленный к невесомой изолирующей нити, находится в однородном горизонтальном электрическом поле, при этом нить отклонена от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 7). Затем направление электрического поля мгновенно изменяется на противоположное. Найти силу натяжения нити в момент максимального отклонения нити от вертикали после переключения поля.*

Запишем условие равновесия шарика в проекции на направление вдоль нити в первоначальном положении

$$qE \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (1)$$

Приращение потенциальной энергии шарика в поле силы тяжести обусловлено работой сил электростатического поля

$$mg(\cos \alpha - \cos \beta)L = qE(\sin \alpha + \sin \beta)L, \quad (2)$$

где  $L$  - длина нити и  $\beta$  - угол максимального отклонения нити.

Комбинируя (1) и (2), имеем

$$\cos \alpha - \cos \beta = \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + \sin \beta)$$

или

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \operatorname{tg} \alpha \cdot 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Последнее уравнение дает

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2} = \operatorname{tg} \alpha$$

или  $\beta = 3\alpha$ .

В положении максимального отклонения нити скорость шарика равна нулю, и, следовательно, центростремительное ускорение также равно нулю, поэтому

$$0 = T' - mg \cos \beta - qE \sin \beta.$$

Решая это уравнение, находим искомую силу натяжения

$$\begin{aligned} T' &= mg \cos \beta + qE \sin \beta = mg(\cos \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta) = \\ &= mg(\cos 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin 3\alpha) = mg \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н.} \end{aligned}$$

## 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 12. 1. Основные положения

*Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. Направлением электрического тока считается то направление, в котором упорядоченно движутся положительные заряды. Силой тока называется скалярная величина  $I$ , равная количеству электричества, которое за единицу времени переносится сквозь поперечное сечение проводника

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Для постоянного тока в металлическом проводнике  $I = en \langle v \rangle S$ , где  $e$  - абсолютное значение заряда электрона,  $n$  - концентрация электронов,  $\langle v \rangle$  - средняя скорость упорядоченного движения электронов,  $S$  - площадь поперечного сечения проводника.

Для существования в проводнике постоянного тока необходимо выполнение следующих условий:

1. напряженность электрического поля в проводнике должна быть отличной от нуля и постоянной во времени;
2. цепь постоянного тока должна быть замкнута;
3. в цепи должны находиться источники энергии (источники тока), которые совершают работу, необходимую для обеспечения упорядоченного движения электрических зарядов в проводнике, и обеспечивают движение электрических зарядов внутри источника тока в направлении, противоположном действию сил электростатического поля, приводящего к упорядоченному движению зарядов в проводнике. Для самого общего описания действия источника тока в цепи, независимо от его природы, вводят понятие — «сторонние» силы. В этом случае под работой источника понимают работу этих «сторонних» сил, т.е. сил не электростатического происхождения.

*Электродвижущая сила (ЭДС)  $\varepsilon$*  — характеристика источника тока, равная работе, производимой источником при переносе единичного положительного заряда по замкнутой цепи

$$\varepsilon = \frac{A}{q}.$$

*Напряжение (падение напряжения) на участке цепи 1-2* - физическая величина, равная полной работе, которая совершается электростатическими и «сторонними» силами при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2 цепи

$$U_{2-1} = \frac{A_{1-2}}{q} = \frac{A_{1-2}^{эл.ст}}{q} + \frac{A_{1-2}^{стор.}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{2-1},$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - потенциалы точек 1 и 2 соответственно.

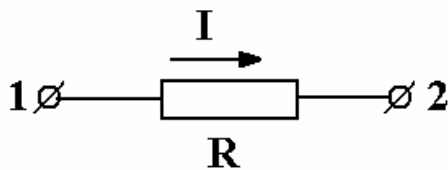


Рис. 1

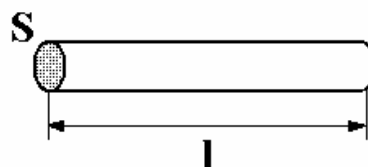


Рис. 2

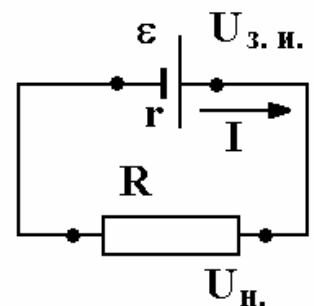


Рис. 3

Для металлического проводника (рис. 1) справедливо соотношение (*закон Ома для однородного участка цепи*)

$$U_{2-1} = \varphi_1 - \varphi_2 = RI$$

( $\varepsilon_{2-1} = 0$ , т.е. на участке цепи отсутствуют источники «сторонних» сил). В случае однородного цилиндрического проводника (рис. 2) его сопротивление равно

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$  - удельное сопротивление проводника,  $l$  - длина проводника,  $S$  - площадь поперечного сечения,  $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$ ,  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $t$  - температура по шкале Цельсия,  $\alpha$  - температурный коэффициент сопротивления.

*Закон Ома для полной цепи*, состоящей из источника с ЭДС  $\varepsilon$ , внутренним сопротивлением  $r$  и внешнего сопротивления  $R$  (нагрузки) (рис. 3)

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

*Напряжение на зажимах источника*  $U_{з.и.}$  (рис. 3) равно напряжению на нагрузке  $U_H$  и меньше  $\varepsilon$  на величину, равную падению напряжения на внутреннем сопротивлении

$$U_{з.и.} = U_H = \varepsilon - Ir.$$

В режиме зарядки источника (батарейки или аккумулятора), изображенном на рис. 4

$$U_{з.и.} = \varepsilon + Ir.$$

Расчет разветвленных электрических цепей удобно производить, используя *два правила Кирхгофа*:

1) Узлом А в разветвленной цепи называется точка, в которой сходится (пересекается) не менее трех проводников. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0, \text{ например, на рис. 5 } I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \text{ Токи считаются}$$

положительными, если они втекают в узел, и отрицательными, если они вытекают из узла.

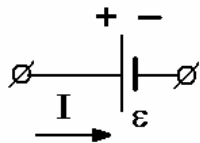


Рис. 4

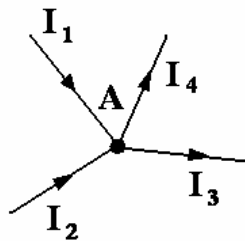


Рис. 5

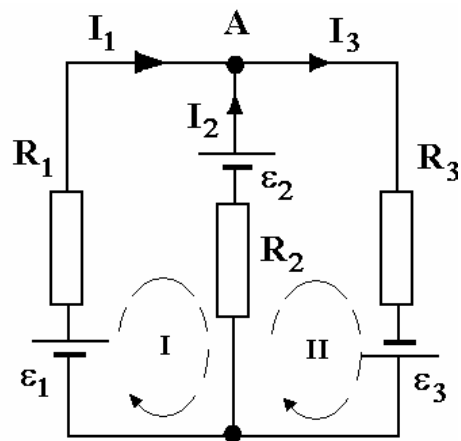


Рис. 6

2) В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивления  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме имеющихся ЭДС  $\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{i=1}^M \varepsilon_i$ . Если токи  $I_i$  совпадают с выбранным направлением обхода контура, то они считаются положительными. ЭДС  $\varepsilon_i$  источников считаются положительными, если они создают токи, направленные в сторону обхода контура.

Расчет разветвленной цепи постоянного тока проводится в следующей последовательности: а) произвольно выбираются направления токов во всех участках цепи; б) записываются  $n - 1$  независимых уравнений правила узлов, где  $n$  — число узлов в цепи; в) произвольные замкнутые контуры выделяются так, чтобы каждый новый контур содержал по крайней мере один участок цепи, не входящий в ранее рассмотренные контуры. В разветвленной цепи, содержащей  $n$  узлов и  $m$  участков цепи между соседними узлами, число независимых уравнений правила контуров равно  $m - n + 1$ .

**Пример.** На рис. 6 стрелками указаны выбранные направления токов  $I_1, I_2, I_3$  на участках цепи. Пунктирными линиями показаны выделенные замкнутые контуры I и II и направления их обхода. Внутренние сопротивления источников ЭДС приняты равными нулю. Для узла А имеем

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

для контура I

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

для контура II

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Если известны параметры элементов цепи ( $R_i, \varepsilon_i$  и  $r_i$ ) и необходимо рассчитать силу и направление протекающих в цепи токов ( $I_i$ ), то полученная система уравнений является достаточной. Направление тока определяется знаком полученной при решении системы уравнений алгебраической величины силы тока: если полученное решение для силы тока положительное, то направление тока на данном участке цепи совпадает с выбранным, если - отрицательное, то направление тока - противоположное выбранному.

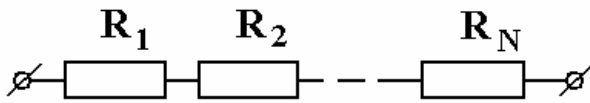


Рис. 7 а

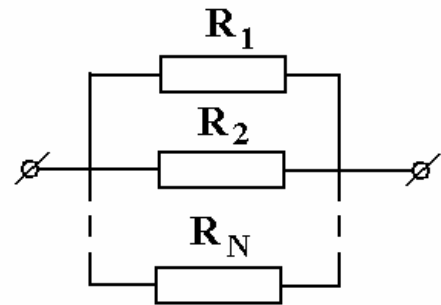


Рис. 7 б

При составлении электрической цепи проводники могут соединяться последовательно или параллельно. При последовательном соединении проводников (см. рис. 7 а): а) сила тока во всех частях цепи одинакова; б) падение напряжения в цепи равно сумме падений напряжений на отдельных участках

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N$$

в) эквивалентное сопротивление цепи равно сумме сопротивлений отдельных проводников

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

При параллельном соединении проводников (рис. 7 б):

а) сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме сил токов, текущих по отдельным проводникам

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

б) падения напряжения в параллельно соединенных участках цепи одинаковы; в) складываются величины, обратные сопротивлениям параллельно соединенных участков

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}.$$

Если шкала амперметра содержит  $N$  одинаковых делений и рассчитана на максимальную силу тока  $I_0$ , то при отклонении стрелки амперметра на  $s$  делений через него проходит ток

$$I = \frac{I_0}{N} s = C_A s$$

где  $C_A$  - цена одного деления.

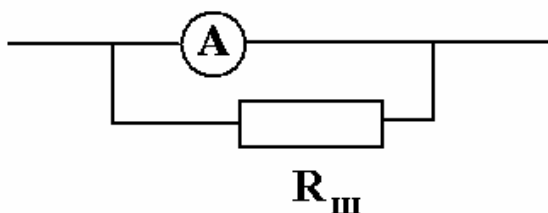
Чтобы расширить пределы измерения силы тока в  $n$  раз и измерять токи до значений  $I > I_0$ , параллельно амперметру нужно присоединить шунт (рис. 8) с сопротивлением

$$R_{ш} = \frac{I_0 R_0}{I - I_0} = \frac{R_0}{n - 1},$$

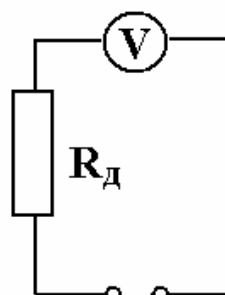
где  $R_0$  — внутреннее сопротивление амперметра.

Показание вольтметра равно падению напряжения на сопротивлении прибора:

$$U_V = I_V R_0$$



**Рис. 8**



**Рис. 9**

и в то же время

$$U_V = \frac{U_0}{N} s = C_V s,$$

где  $U_0$  - напряжение на зажимах прибора, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу,  $C_V$  - цена деления шкалы вольтметра.

Чтобы расширить пределы измерения напряжения в  $n$  раз и измерять напряжения до значений  $U > U_0$ , последовательно вольтметру нужно присоединить дополнительное сопротивление (рис. 9)

$$R_{д} = \frac{U - U_0}{U_0} R_0 = (n - 1) R_0,$$

где  $R_0$  - внутреннее сопротивление вольтметра.

Если электрический ток постоянен, то при перемещении зарядов на участке электрической цепи за время  $t$  электрические и «сторонние» силы совершают работу

$$A = IUt,$$

где  $I$  - сила тока,  $U$  - падение напряжения на рассматриваемом участке. В общем случае, если ток — переменный  $i(t)$ , то

$$A = \int_0^t i(t)U(t)dt.$$

Мощность (мгновенная) электрического тока

$$P = iU.$$

Если проводник (сопротивлением  $R$ ), по которому протекает ток силой  $I$ , неподвижен и в нем не происходят химические реакции, то мгновенная мощность тока

$$P = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \quad \text{и}$$

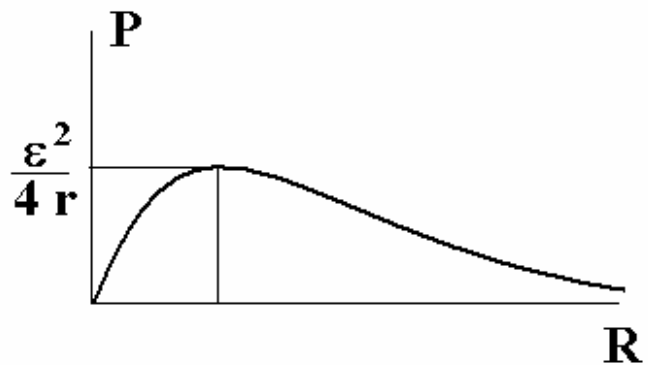
характеризует скорость выделения теплоты в проводнике, поскольку в этом случае вся работа по перемещению зарядов затрачивается на нагрев проводника.

В цепи, содержащей источник тока (рис. 3), тепловая мощность, выделяющаяся на нагрузке, считается полезной, на внутреннем сопротивлении — бесполезной. Коэффициент полезного действия (КПД) цепи  $\eta$  определяется соотношением

$$\eta = \frac{R}{R + r}.$$

График зависимости полезной мощности от сопротивления нагрузки представлен на рис. 10. Наибольшая полезная мощность  $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$  достигается при  $R = r$ . КПД цепи в этом случае составляет 50%.

Если напряжение в цепи меняется с течением времени по закону синуса (или косинуса):  $U = U_0 \sin \omega t$ , то при отсутствии в цепи емкости или индуктивности по тому же закону изменяется сила тока:



**Рис. 10**



$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{R} = I_0 \sin \omega t,$$

( $U_0$  и  $I_0$  - амплитудные значения тока и напряжения,  $\omega$  - частота).

Сопротивление  $R$  электрической цепи, не имеющей емкости и индуктивности, называют активным сопротивлением.

Сопротивление  $R_C$  участка цепи, содержащего конденсатор, называют емкостным сопротивлением.

$$R_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Ток в цепи, содержащей конденсатор, опережает напряжение по фазе на угол  $\pi/2$

$$I = \frac{U_0}{1/\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Сопротивление участка, содержащего индуктивность, равно  $R_L = \omega L$ .

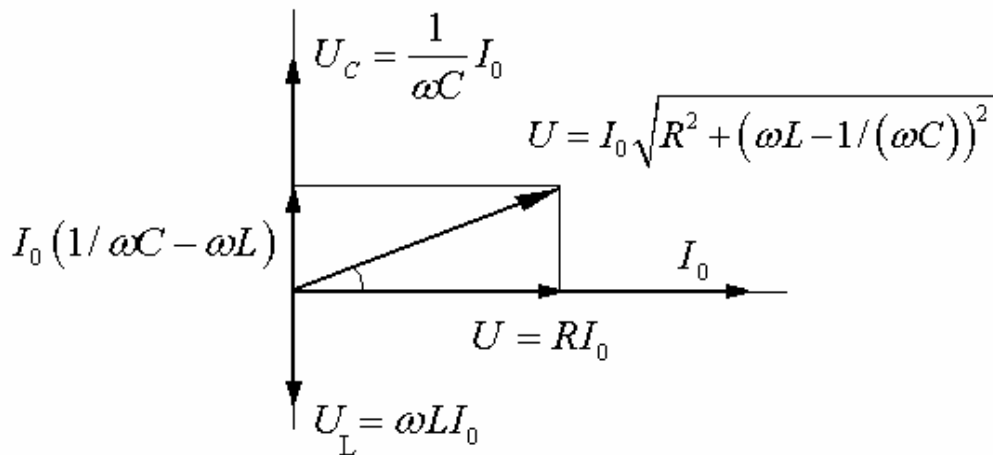
Ток в цепи, содержащей индуктивность, отстает по фазе от напряжения на угол  $\pi/2$

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Особенности цепи, содержащей активное, емкостное и индуктивное сопротивления, соединенные последовательно, принято изображать при помощи векторной диаграммы (рис. 11).

Из рисунка видно, что величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$$



**Рис. 11**

играет роль полного сопротивления цепи переменному току.

Амплитудное значение силы тока в цепи равно:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}.$$

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = (\omega L - 1/(\omega C)) / R.$$

При последовательном соединении резистора, конденсатора и катушки индуктивности среднее за период значение мощности, развиваемой источником переменного синусоидального тока, равно:

$$P = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi.$$

Согласно этой формуле на катушке индуктивности и конденсаторе мощность не выделяется, поскольку для них  $\varphi = \pm \pi / 2$ .

## 12.2. ЗАДАЧИ

1. Мощность, рассеиваемая на резисторе с сопротивлением  $R_1$  подсоединенном к батарее, равна  $N$ . Чему равна ЭДС батареи, если эта мощность не изменилась при замене  $R_1$  на  $R_2$ ?
2. Какова сила тока в подводящих проводах при коротком замыкании, если на двух плитках с сопротивлениями  $R_1=200$  Ом и  $R_2=500$  Ом выделяется при поочередном включении одинаковая мощность  $N = 200$  Вт?
3. Электроэнергия генератора мощностью  $N_0$  передается потребителю по проводам, имеющим сопротивление  $r$ . ЭДС генератора равна  $\varepsilon$ . Определить КПД линии передачи, т.е. отношение мощности, выделяемой на полезной нагрузке, к мощности генератора. Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.
4. Имеется прибор с ценой деления  $i_0=10$  мкА. Шкала прибора имеет  $n=100$  делений; внутреннее сопротивление прибора  $r = 50$  Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр с пределом измерения напряжения  $U_0=200$  В или миллиамперметр с пределом измерения тока  $I_0 = 800$  мА?
5. К гальванометру с сопротивлением  $r=290$  Ом присоединили шунт, понижающий чувствительность гальванометра в 10 раз.

Какой резистор необходимо включить последовательно с шунтированным гальванометром, чтобы общее сопротивление осталось неизменным?

6. Сопротивление амперметра  $R=0,04$  Ом, а максимальный электрический ток, который можно измерить этим прибором,  $I=1,2$  А. Определите сечение медного провода длиной  $l=10$  см, который нужно подключить к амперметру, чтобы можно было измерить этим прибором электрический ток  $I_2=6$ А. Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.
7. В схеме, изображенной на рис. 12,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$  В, а внутренние сопротивления источников  $r = 0,5$  Ом. Сопротивления  $R_1 = 0,5$  Ом,  $R_2 = 1,5$  Ом. Найдите токи в сопротивлениях и ток, текущий через элемент  $\varepsilon_1$ .

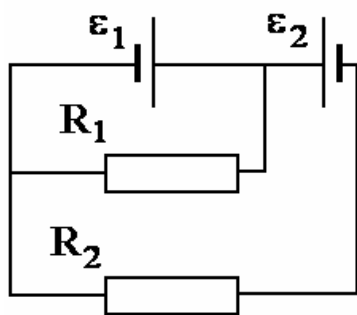


Рис.12

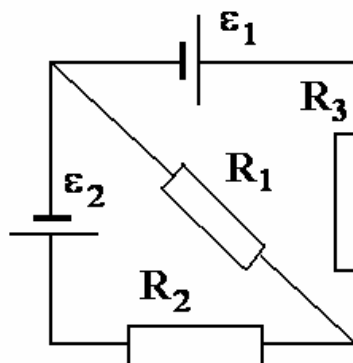


Рис.13

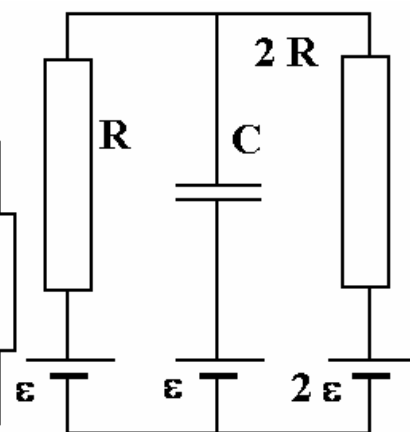


Рис.14

8. В схеме, изображенной на рис. 13,  $\varepsilon_1 = 2,1$  В,  $\varepsilon_2 = 1,9$  В,  $R_1 = 45$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом и  $R_3 = 10$  Ом. Найдите токи во всех участках цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.
9. Определить заряд на конденсаторе в цепи, показанной на рис. 14.
10. В цепи, показанной на рис. 15,  $\varepsilon_1 = 15$  В, внутреннее сопротивление  $r_1 = 3$  Ом,  $\varepsilon_2 = 30$  В,  $r_2 = 6$  Ом, сопротивление  $R = 8$  Ом. Емкость конденсатора  $C=100$  мкФ. Найдите энергию, запасенную в конденсаторе.
11. Через аккумулятор в конце зарядки течет ток  $I_1 = 4$  А. При этом напряжение на его клеммах  $U_1 = 12,6$  В. При разрядке того же аккумулятора током  $I_2 = 6$  А напряжение составляло  $U_2 = 11,1$  В. Найти ток короткого замыкания.

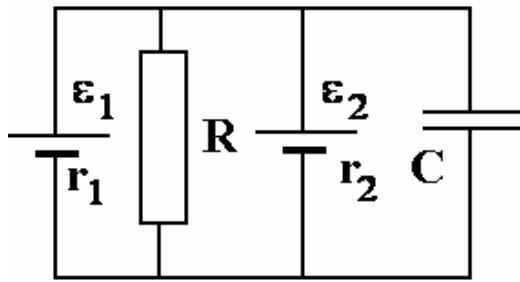


Рис.15

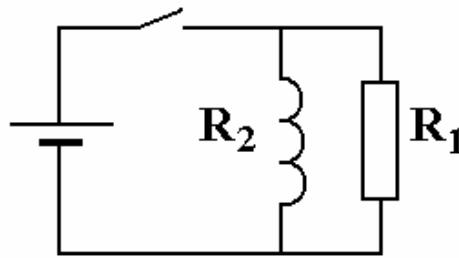


Рис.16

Рис.17

12. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник закипает через 10 мин, при включении другой — через 15 мин. Через какое время чайник закипит, если эти обмотки включить вместе: а) параллельно, б) последовательно?
13. Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 100$  Ом равномерно нарастает от  $I_0 = 0$  до  $I_{\max} = 10$  А в течение времени  $\tau = 30$  с. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся за это время в проводнике.
14. ЭДС батареи  $\varepsilon = 12$  В, сила тока короткого замыкания  $I_0 = 5$  А. Какую наибольшую мощность может дать батарея в цепь?
15. Электромотор питается от батареи с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В. Какую мощность развивает мотор при протекании по его обмотке тока  $I = 2$  А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток  $I_0 = 3$  А?
16. Батарея с  $\varepsilon = 12$  В подключается к соединенным параллельно катушке индуктивности и сопротивлению  $R_1 = 30$  Ом (рис. 16) Сопротивление провода обмотки катушки  $R_2 = 15$  Ом, внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. Определить ток через батарею сразу после замыкания ключа и после того, как во всех участках цепи установится постоянное значение тока.
17. Определить общее сопротивление цепи, показанной на рис. 17.
18. Определить ток через идеальный амперметр в схеме, изображенной на рис. 18.  $R_1 = R_2 = 3$  Ом,  $R_3 = 4$  Ом,  $R_4 = 5$  Ом,  $U = 12$  В.
19. Определить заряды на конденсаторах в схеме показанной на рис. 19.  $R = 5$  Ом,  $r = 1$  Ом,  $\varepsilon = 6$  В,  $C = 8$  мкФ,

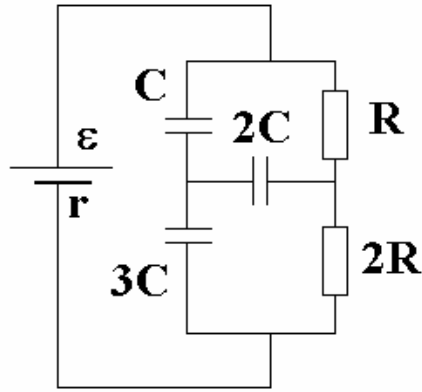


Рис. 18

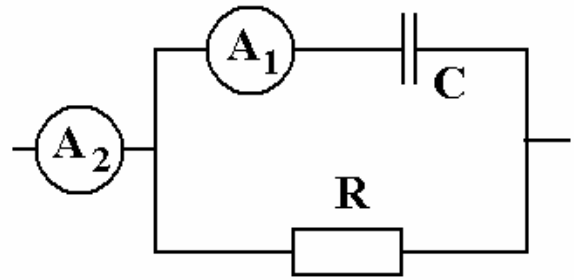


Рис. 19

Рис. 20

20. Через параллельно соединенные резистор с сопротивлением  $R = 200$  Ом и конденсатор с емкостью  $C = 5$  мкФ течет переменный ток с циклической частотой  $\omega = 10^3$  с<sup>-1</sup> (рис 20). Амперметр  $A_1$  показывает ток  $I_1 = 1$  А. Найти показание амперметра  $A_2$ . Оба амперметра предназначены для измерения переменного тока.

### 12. 3. Примеры решения задач

**Пример 1.** Источник тока подключают к цепи, содержащей конденсатор и сопротивления  $R_1 = 1$  Ом и  $R_2 = 3$  Ом (рис. 21). Сразу после замыкания ключа  $K$  подключенный к источнику вольтметр показывает напряжение  $U_1 = 6$  В, а после того как конденсатор зарядится, - напряжение  $U_2 = 9,6$  В. Найти показания вольтметра при разомкнутом ключе. Током через вольтметр пренебречь.

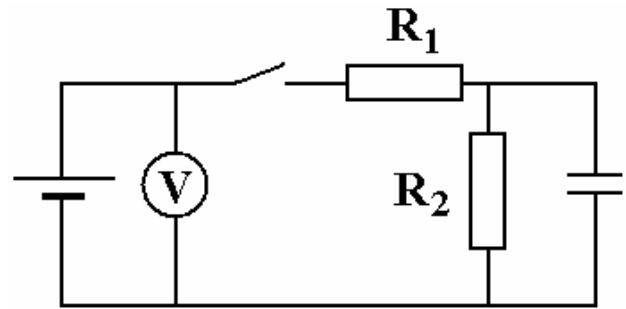


Рис. 21

Сразу после замыкания цепи, когда ток идет через конденсатор, минуя сопротивление  $R_2$ , ток в цепи  $I_1$  связан с показаниями вольтметра соотношением

$$I_1 = \frac{U}{R_1}.$$

В установившемся режиме ток через конденсатор не течет и

$$I_2 = \frac{U_2}{R_1 + R_2}.$$

Напряжение на зажимах источника связано с ЭДС и током в цепи стандартными соотношениями

$$U_1 = \varepsilon - I_1 r,$$

$$U_2 = \varepsilon - I_2 r.$$

Решая систему четырех уравнений, нетрудно получить, что

$$\varepsilon = \frac{U_1 U_2 R_2}{U_1 (R_1 + R_2) - U_2 R_1} = 12 \text{ В}.$$

**Пример 2.** Электрический кипятильник имеет три нагревательных элемента с сопротивлениями  $R_1, R_2, R_3$ . Если включить в сеть только элемент  $R_1$ , вода в кастрюле закипит через  $t_1 = 4$  мин, если последовательно включить  $R_1$  и  $R_2$  - через  $t_{12} = 6$  мин, а если включить параллельно только  $R_1$  и  $R_3$  - через  $t_{13} = 3$ . За какое время вода будет доведена до кипения, если включить в сеть все три элемента параллельно?

Эквивалентная мощность  $\tilde{N}$  параллельно включенных нагревателей мощностью  $N_1, N_2, \dots$  складывается

$$\tilde{N} = N_1 + N_2 + \dots,$$

соединенных последовательно – считается по формуле

$$\frac{1}{\tilde{N}} = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots$$

В случае двух нагревателей

$$\tilde{N} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}.$$

Обозначим  $Q$  - количество теплоты, необходимое для закипания воды. Тогда  $Q = N_1 t_1$  ( $N_1$  - мощность нагревателя с сопротивлением  $R_1$ ). По условию

$$Q = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} t_{12},$$

$$Q = (N_1 + N_2) t_{13},$$

$$Q = (N_1 + N_2 + N_3)t_x,$$

где  $t_x$  - искомое время.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\frac{Q}{t_x} = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$\frac{Q}{t_{13}} = N_1 + N_3,$$

$$\frac{Q}{t_1} = N_1,$$

$$\frac{Q}{t_{12}} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}.$$

Вычтем из первого уравнения второе

$$N_2 = \frac{Q}{t_x} - \frac{Q}{t_{13}}.$$

Воспользовавшись третьим уравнение, подставим  $N_1$  и  $N_2$  в последнее.

В результате

$$t_x = \frac{t_{13}(t_{12} - t_1)}{t_{13} + t_{12} - t_1}.$$

**Пример 3.** Найти полное сопротивление и разность фаз для цепи, изображенной на рис. 22.

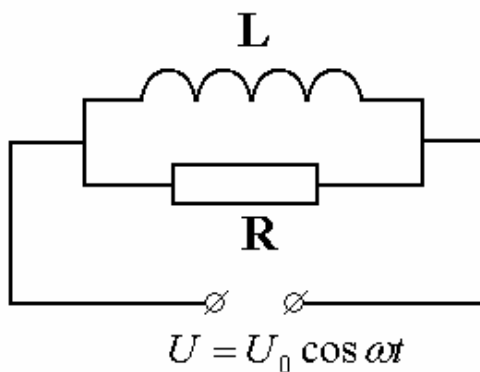


Рис. 22

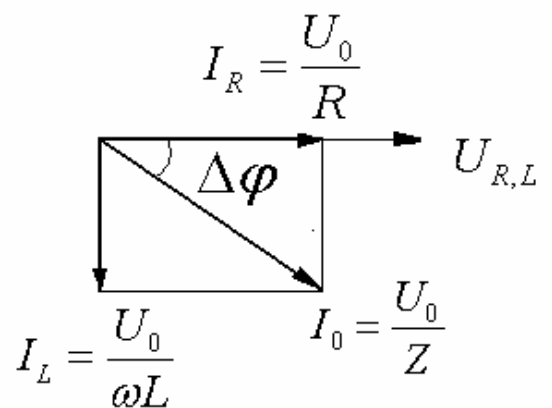


Рис. 23

Напряжение на  $R$  и  $L$  одинаково, поэтому векторная диаграмма имеет вид, показанный на рис. 23, откуда следует, что

$$Z = \left( \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}} \right)^{-1}$$

и

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{R}{\omega L}.$$

## 13. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### 13.1. Основные понятия

Магнитное поле в каждой точке пространства характеризуется *вектором магнитной индукции*  $\mathbf{B}$ . Графически магнитное поле можно изобразить, если ввести представление о линиях магнитной индукции (иногда их называют *силовыми линиями магнитного поля*). Линии магнитной индукции - воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\mathbf{B}$  в этих точках поля. Линии магнитной индукции замкнутые (в отличие от линий напряженности электрического поля).

На электрический заряд величиной  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле индукцией  $\mathbf{B}$ , действует *сила Лоренца*, модуль которой равен

$$F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Направление силы  $\mathbf{F}_{\text{л}}$  определяется правилом левой руки: расположим руку так, чтобы линии магнитной индукции (т.е. вектор  $\mathbf{B}$ ) входили в ладонь, а направление четырех пальцев совпало с направлением вектора скорости заряда. Тогда направление отогнутого в сторону большого пальца совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд (на отрицательный заряд действует сила противоположного направления).

На прямой проводник с силой тока  $I$  и длиной  $l$ , помещенный в однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , действует *сила Ампера*, направление которой определяется правилом левой руки, а модуль равен

$$F_{\text{А}} = IlB \sin \alpha,$$



где  $\alpha$  - угол между вектором  $\mathbf{B}$  и направлением тока в проводнике.

На участок длиной  $l$  одного из двух параллельных прямых бесконечных проводников, расположенных на расстоянии  $R$  друг от друга, по которым текут токи с силами токов  $I_1$  и  $I_2$ , действует сила притяжения (отталкивания) при одинаковых (противоположных) направлениях токов, модуль которой равен

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{R} l,$$

где  $\mu_0$  - магнитная постоянная в системе единиц СИ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Тл·м/Ф (Гн/м),  $\mu$  - относительная магнитная проницаемость однородной изотропной среды, в которой находятся проводники с током.

Направление тока в проводе и направление линий магнитной индукции связаны правилом правого винта. Величина магнитной индукции поля, созданного током  $I$ , протекающим по тонкому прямому бесконечному проводнику на расстоянии  $r$  от проводника

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

*Потоком магнитной индукции*  $\Delta\Phi$  сквозь участок поверхности с малой площадью  $\Delta S$ , такой, что в его пределах поле  $\mathbf{B}$  можно считать однородным, называется скалярная величина  $\Delta\Phi = BS \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между вектором  $\mathbf{B}$  и нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности. Магнитный поток  $\Phi$  через произвольную поверхность площадью  $S$  находится алгебраическим суммированием потоков

$$\Delta\Phi_i \text{ через участки поверхности } \Phi = \sum_{i=1}^N \Delta\Phi_i.$$

Если магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, является функцией времени, то в контуре возникает индуцированная ЭДС

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Направление ЭДС индукции и индукционного тока определяется *правилом Ленца*: индукционные токи направлены так, чтобы противодействовать причине, их вызвавшей.

На концах прямолинейного проводника длины  $l$ , движущегося перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}$  со скоростью  $v$  возникает напряжение

$$U = \varepsilon = Blv.$$

В контуре с изменяющимся током, который находится в изменяющемся собственном магнитном поле, возникает явление электромагнитной индукции, называемое в этом случае явлением самоиндукции, характеристикой которого служит ЭДС самоиндукции. Собственное магнитное поле тока создает магнитный поток  $\Phi$  сквозь контур, который пропорционален силе тока в контуре, если контур находится в неферромагнитной среде, т.е.  $\Phi = LI$ , где величина  $L$  называется индуктивностью контура. ЭДС самоиндукции в этом случае будет

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}.$$

Для создания тока  $I$  в контуре с индуктивностью  $L$  необходимо совершить работу на преодоление ЭДС самоиндукции. Энергия контура с током - величина, равная этой работе. Если среда, в которой находится контур, — неферромагнитная, то энергия контура с током будет

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

## 13.2. ЗАДАЧИ

1. Две параллельные шины, подключенные к аккумулятору с ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $r$ , находятся в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . Шины замкнуты проводником длиной  $l$  и сопротивлением  $R$ , который перемещается по шинам без нарушения контакта перпендикулярно полю со скоростью  $v$ . Пренебрегая сопротивлением шин, определите напряжение на зажимах источника, мощность тепловых потерь в проводнике, а также механическую мощность, подводимую к проводнику.

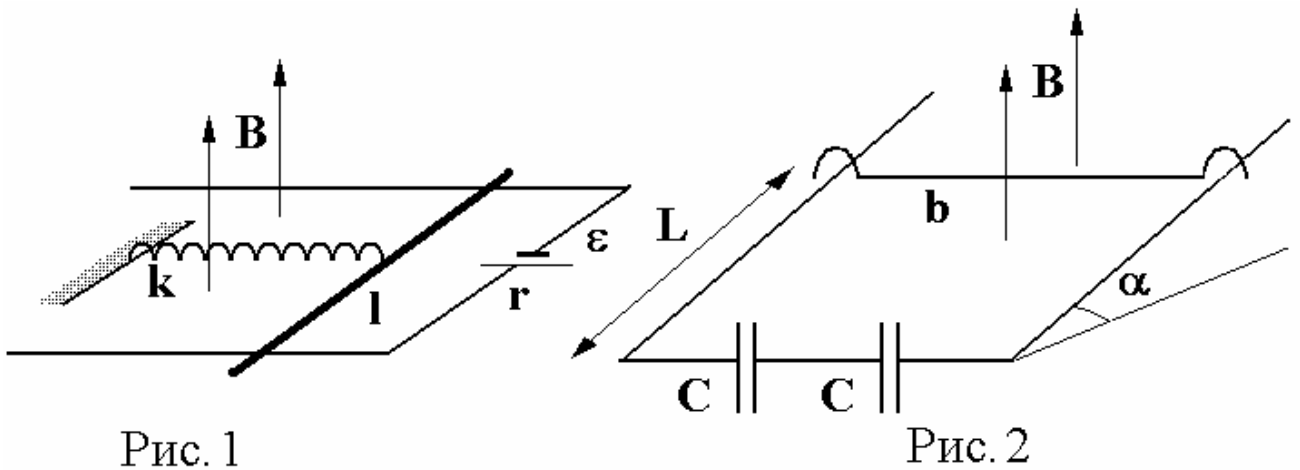


Рис. 1

Рис. 2

2. Проводящий стержень длиной  $l=10$  см и сопротивлением  $R=1$  Ом может скользить по горизонтально расположенным параллельным шинам, которые соединены с источником постоянного тока с  $\varepsilon=10$  В и внутренним сопротивлением  $r=1$  Ом. К середине стержня прикреплена невесомая пружина с коэффициентом жесткости  $k=0,1$  Н/м, расположенная в горизонтальной плоскости (рис. 1). Перпендикулярно плоскости проводников действует однородное магнитное поле с индукцией  $B=10^{-2}$  Тл. Пренебрегая сопротивлением шин и проводов, определите энергию деформации пружины.
  
3. По двум параллельным направляющим, наклоненным под углом  $\alpha$  к горизонту и расположенным на расстоянии  $b$  друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массой  $m$ . Направляющие замкнуты снизу на незаряженную батарею конденсаторов, емкость каждого из которых равна  $C$ . Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого  $B$  и направлена вертикально. В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии  $L$  от основания «горки» (рис. 2). Какую скорость будет иметь перемычка у основания «горки», после того как ее отпустят? Сопротивлением направляющих и перемычки пренебречь.

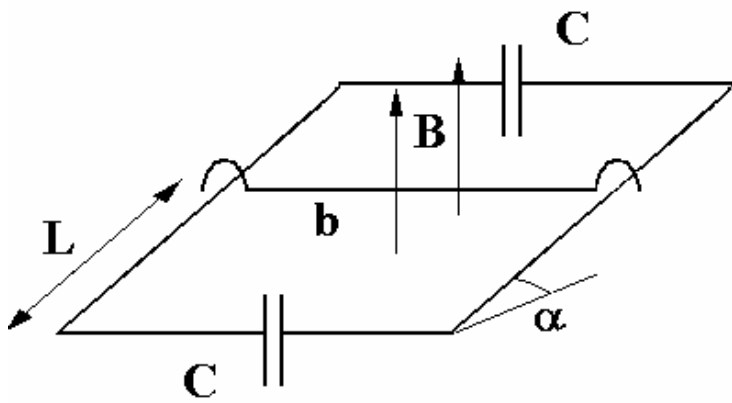


Рис. 3

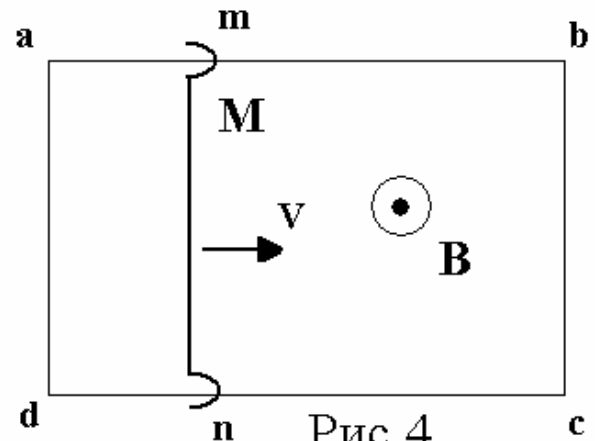


Рис. 4

4. Квадратная проволочная рамка  $abcd$  со стороной длины  $L$  помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , перпендикулярной плоскости рамки (рис. 4). По рамке с постоянной скоростью  $V$  скользит перемычка  $mn$ . Определить разность потенциалов между точками  $c$  и  $b$  в тот момент, когда перемычка находится посередине рамки. Сопротивление единицы длины перемычки и проводов одинаково.
5. На двух длинных гладких параллельных горизонтально расположенных проводящих штангах покоится проводящая перемычка массой  $M$  (рис. 5). Расстояние между штангами  $L$ . К штангам через сопротивление  $R$  и разомкнутый ключ  $K$  подключена батарея с постоянной ЭДС. Вся система находится в однородном магнитном поле с вертикально направленной индукцией  $B$ . Определить величину и направление ускорения  $\mathbf{a}$  перемычки в начальный момент времени сразу после замыкания ключа, если установившаяся скорость, которую приобретает перемычка после замыкания, равна по модулю  $V$ . Внутренним сопротивлением батареи, сопротивлением перемычки и штанг пренебречь.
6. Горизонтальный проводник массы  $M$  может свободно скользить по двум гладким вертикальным проводящим стержням (рис. 6). Стержни разнесены на расстояние  $L$  друг от друга и подключены внизу к батарее с постоянной ЭДС через разомкнутый ключ  $K$ . Перпендикулярно плоскости движения приложено однородное магнитное поле с индукцией  $B$ . Проводник удерживают в некотором положении и освобождают в момент замыкания ключа. Найти величину и направление установившейся скорости  $V$ , с которой будет двигаться проводник, если сразу после замыкания его ускорение  $\mathbf{a}$  направлено вверх,

а скорость равна нулю. Сопротивление проводника  $R$ , сопротивлением стержней и внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Система находится в поле тяжести Земли.

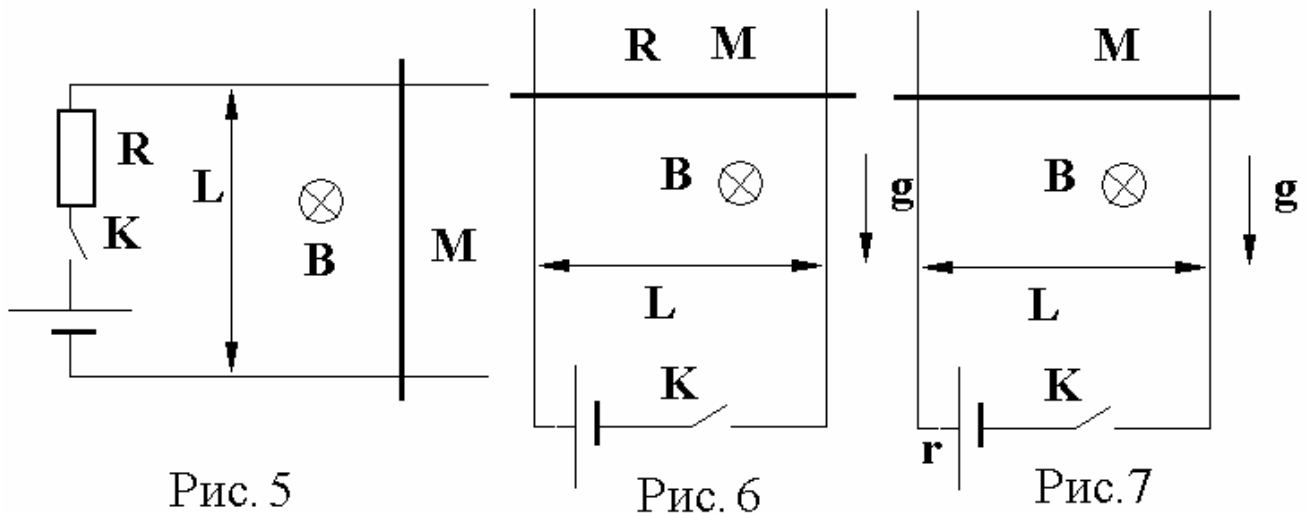


Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

7. Горизонтальный проводник массой  $M$  может свободно скользить по двум гладким вертикальным проводящим стержням. Стержни разнесены на расстояние  $L$  друг от друга и подключены внизу к батарее с постоянной ЭДС через разомкнутый ключ  $K$ . Перпендикулярно плоскости движения приложено однородное магнитное поле с индукцией  $B$ . Проводник удерживают в некотором положении и освобождают в момент замыкания ключа. Найти величину и направление ускорения  $a$  проводника сразу после замыкания, если в этот момент скорость проводника равна нулю, а установившаяся скорость, с которой опускается проводник после замыкания ключа, равна  $V$ . Внутреннее сопротивление батареи  $r$ , сопротивлением стержней и проводника пренебречь. Система находится в поле тяжести Земли.
8. На двух длинных гладких параллельных горизонтально расположенных проводящих штангах покоится проводящая перемычка массой  $M$ , имеющая сопротивление  $R$ . Расстояние между штангами  $L$ . К штангам через разомкнутый ключ  $K$  подключена батарея с постоянной ЭДС. Вся система находится в однородном магнитном поле с вертикально направленной индукцией  $B$ . Определить величину и направление установившейся скорости  $V$ , которую приобретет перемычка после замыкания ключа, если в начальный момент времени сразу после замыкания ее ускорение равно по модулю  $a$ . Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением штанг пренебречь.
9. По двум параллельным проводникам, отстоящим друг от друга на  $l = 50$  см, перемещают проводник-перемычку с постоянной

скоростью  $v = 10 \text{ м/с}$ . Между левыми концами проводников (рис. 9) подключены последовательно два конденсатора, причем емкость конденсатора  $C_2 = 1,5C_1$ . Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости, в которой лежат проводники. Найти индукцию поля, если на конденсаторе с  $C_2$  напряжение  $U_2 = 0,5 \text{ В}$ .

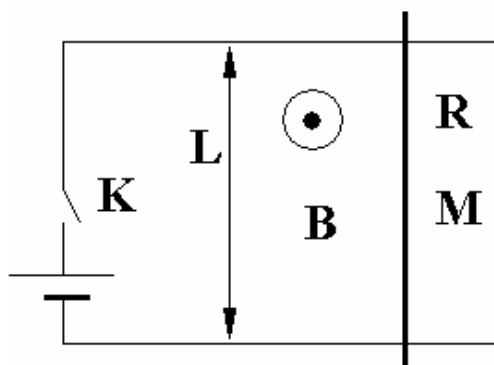


Рис. 8

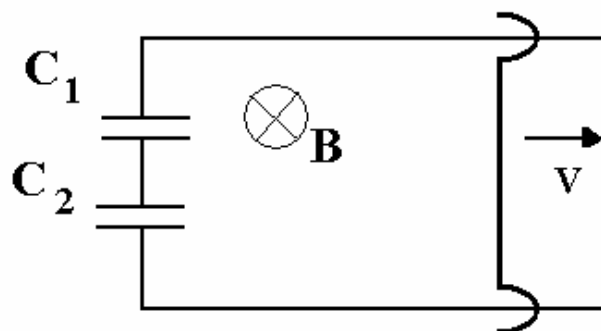


Рис. 9

10. На гладких горизонтальных параллельных рельсах, расстояние между которыми  $l = 1,5 \text{ м}$ , находится токопроводящий стержень массой  $m = 50 \text{ г}$ . Рельсы соединены с конденсатором, емкость которого  $C = 0,4 \text{ Ф}$ , и находятся в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$ . Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы разогнать стержень до скорости  $v = 5 \text{ м/с}$ .

11. Проводящий стержень  $OA$  вращается вокруг точки  $O$  в плоскости, перпендикулярной к вектору магнитного поля  $B = 1 \text{ Тл}$  с угловой скоростью  $\omega = 300 \text{ рад/с}$ . Свободный конец стержня скользит по дуге окружности радиусом  $R = 0,1 \text{ м}$  (рис. 10). Между точкой  $C$  дуги и точкой закрепления стержня включена батарейка. Направление вращения и направление магнитной индукции указана на рисунке. Сопротивления стержня, дуги и контакта между ними пренебрежимо мало. Определить напряжение на зажимах батарейки.

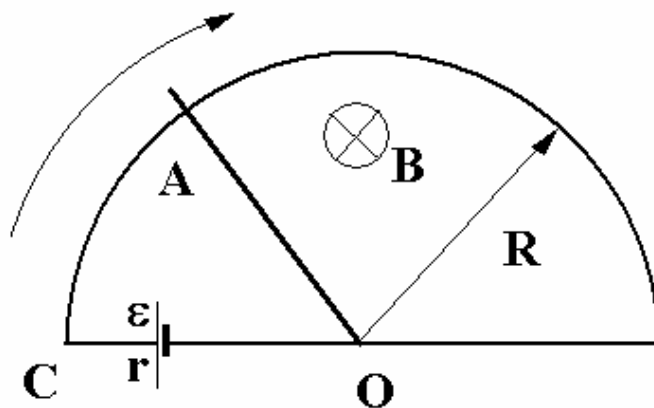


Рис. 10

12. Проволочное кольцо радиусом  $R = 1 \text{ см}$ , по которому течет ток

$I = 2$  А, помещен в магнитное поле с индукцией  $B=1$  Тл. Силовые линии поля перпендикулярны плоскости кольца. Определить силу, растягивающую или сжимающую кольцо

13. Проводящая перемычка массой  $m = 15$  г может скользить без трения по двум параллельным горизонтальным проводам, расположенным на расстоянии  $l = 0,25$  см друг от друга в вертикальном магнитном поле с индукцией  $B=0,6$  Тл. К концам проводов подключают конденсатор емкостью  $C=2,5$  Ф, заряженный до напряжения  $U=5$  В. Какую скорость приобретет перемычка к моменту полного разряда конденсатора? Какое количество тепла выделится при этом в цепи?
14. Проводник длиной  $l=1$  м равномерно вращается в горизонтальной плоскости с частотой  $n=10$  об/с. Ось вращения проходит через конец стержня. Вертикальная составляющая магнитного поля Земли  $B=50$  мкТл. Определить разность потенциалов между концами проводника.
15. Электрон, пройдя разность потенциалов  $U=100$  В, движется в вакууме параллельно длинному прямому проводнику на расстоянии  $r=10$  см от него. Определить силу, действующую на электрон, если по проводнику течет ток  $I=1$  А.
16. Электрон, имея скорость  $v=2$  Мм/с влетел в однородное магнитное поле с индукцией  $B=30$  мТл под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению линий индукции. Определить радиус  $R$  и шаг  $H$  винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.
17. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U=104$  В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ( $E=10$  кВ/м) и магнитное ( $B=0,1$  Тл) поля. Найти удельный заряд частицы, если двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытала отклонений от прямолинейной траектории.
18. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая

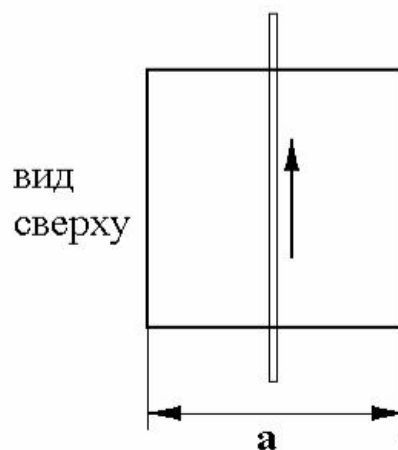
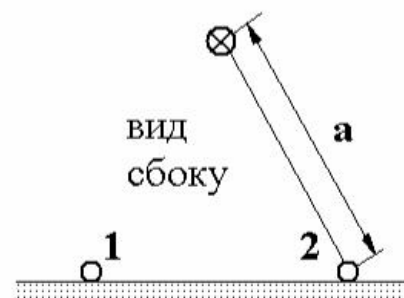


Рис. 11

жесткая тонкая квадратная рамка со стороной, равной  $a$ . Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (рис. 11). Масса рамки  $M$ , индукция магнитного поля у боковых сторон рамки 1 и 2 равна  $B$ . Коэффициент трения скольжения рамки о поверхность стола равен  $\mu$  ( $\mu < 1/\sqrt{3}$ ). Какой силы ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала скользить по столу, не отрываясь от него?

19. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая квадратная рамка со стороной равной  $a$ . Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (рис.11). Масса рамки  $M$ , индукция магнитного поля у боковых сторон рамки 1 и 2 равна  $B$ . Коэффициент трения скольжения рамки о стол таков, что при некоторой величине тока, пропущенного через рамку, она начинает приподниматься (без скольжения) относительно одной из своих сторон. Найти величину этого тока.
20. Пучок протонов попадает в область пространства, где создано однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Направление поля перпендикулярно падающему пучку. В этом поле протоны движутся по дуге окружности радиусом  $r = 0,2$  м и попадают на заземленную мишень. Ток в пучке  $I = 0,1$  мА. Найти тепловую мощность  $P$ , выделяемую в мишени. Удельный заряд протона  $e/m = 10^8$  Кл/кг.

### 13.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом  $\alpha$  к горизонту и расположенным на расстоянии  $b$  друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массой  $m$ . Направляющие замкнуты снизу и сверху незаряженными конденсаторами емкостью  $C$  каждый. Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого  $B$  направлена вертикально. В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии  $L$  от основания «горки». Какую скорость будет иметь перемычка у основания «горки», после того как ее отпустят (рис. 3)? Сопротивлением направляющих и перемычки пренебречь.



При движении переключки вниз в цепи (незамкнутой) возникает индукционный ток, идущий на зарядку конденсаторов, чья эквивалентная емкость  $\tilde{C} = 2C$  (параллельное соединение). Величина этого тока

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{\varepsilon_i \tilde{C}}{t}.$$

где  $t$  - время движения переключки. ЭДС индукции, возникающая при движении стержня в магнитном поле,  $\varepsilon_i = Blv \cos \alpha$ .

Возникающая амперовская сила  $F_A = IBl$  направлена горизонтально. Закон Ньютона, записанный в проекции на ось, направленную вдоль наклонной плоскости, имеет вид

$$mgl \sin \alpha - IBl \cos \alpha = ma.$$

Подставив сюда  $I$ , имеем

$$mg \sin \alpha - \frac{2CBlv \cos^2 \alpha}{t} = ma.$$

Учитывая, что ускорение  $a = v/t$ , имеем

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + 2CBl \cos^2 \alpha}.$$

Последнее уравнение – уравнение кинематики

$$L = \frac{v^2}{2a},$$

где  $v$  - искомая скорость переключки у основания наклонной плоскости. Отсюда

$$v = \sqrt{2aL}.$$

**Пример 2.** Прямолинейный стержень длины  $l = 1$  м подвешен на двух одинаковых пружинках в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,2$  Тл (рис. 12). По стержню пропускают кратковременный импульс тока  $I = 500$  А за время  $\tau = 0,01$  с, в результате чего стержень приобретает скорость, направленную

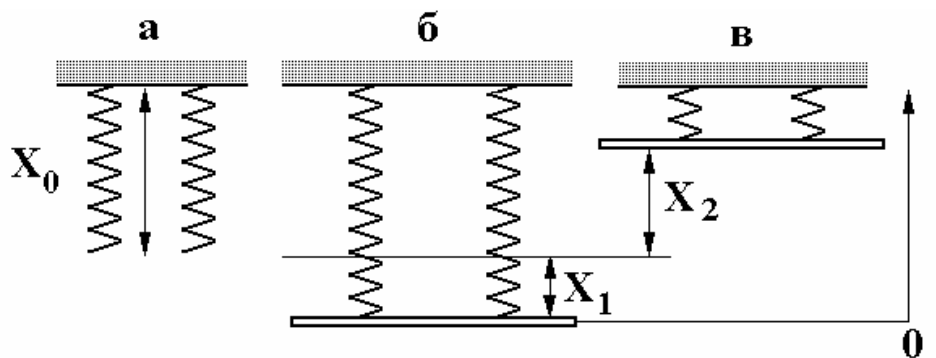


Рис. 12

вертикально. Определить наибольшую величину смещения стержня при его последующем движении. Смещением стержня за время  $\tau$  пренебречь. Коэффициент упругости пружин  $k = 20 \text{ Н/м}$ , масса стержня  $m = 0,4 \text{ кг}$ .

При прохождении тока стержню сообщается импульс  $p = F\tau$ , где  $F = IBl$  - сила Ампера, действующая на стержень со стороны магнитного поля. Закон сохранения энергии, записанный для двух положений стержня, показанных на рис. 12 б) и в), имеет вид (потенциальная энергия отсчитывается от нижнего положения стержня)

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{\tilde{k}x_1^2}{2} = mg(x_1 + x_2) + \frac{\tilde{k}x_2^2}{2},$$

где  $x_1$  - растяжение пружин (по сравнению с их ненапряженной длиной  $x_0$ ) под действием силы тяжести стержня,

$$\tilde{k}x_1 = mg, \quad (1)$$

где  $\tilde{k} = 2k$  - суммарный или эффективный коэффициент жесткости двух параллельных пружин.

Сделав замену переменных  $x_1 + x_2 = y$  и еще раз учитывая закон Гука (1), нетрудно получить, что

$$y = \frac{p}{\sqrt{m\tilde{k}}}.$$

## 14. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### 14.1. Основные понятия

В оптике изучаются явления распространения и взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. Основными характеристиками электромагнитного излучения являются:  $\nu$  - частота волны, в виде которой представляется излучение;  $\lambda$  - длина волны, т.е. расстояние, на котором фаза гармонической волны изменяется на  $2\pi$ .

В вакууме электромагнитное излучение распространяется со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , в среде его скорость распространения  $v$

уменьшается:  $v < c$ . Длина волны, частота и скорость распространения волны связаны соотношением:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = v/T,$$

где  $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$  - период колебаний волны;  $\omega$  — циклическая частота колебаний. Для электромагнитного излучения в вакууме

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = cT.$$

Для описания распространения и взаимодействия электромагнитного излучения с веществом используют различные приближения: геометрической оптики, физической (волновой) оптики и квантовой оптики.

Приближение геометрической оптики используется в тех случаях, когда длиной волны электромагнитного излучения можно пренебречь по сравнению с размерами приборов, с помощью которых изучается это излучение. В рамках этого приближения рассматриваются законы распространения в прозрачных средах электромагнитного излучения видимой части спектра, т.е. света ( $\lambda_0 = 0,4 - 0,76$  мкм). Это рассмотрение проводится на основе представлений о свете как о совокупности световых лучей - линий, вдоль которых распространяется энергия световых электромагнитных волн. Пучки световых лучей, пересекаясь, не взаимодействуют и распространяются после пересечения независимо друг от друга.

Отношение скорости света в вакууме  $c$  к скорости света  $v$  в данной среде  $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon}$  называется (абсолютным) показателем преломления этой среды, здесь  $\epsilon$  и  $\mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\mu \approx 1$  — для неферромагнитных сред. Среда называется оптически однородной, если показатель преломления ее везде одинаков. В оптически однородной среде лучи прямолинейны.

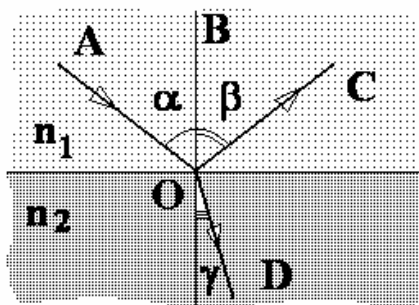


Рис. 1

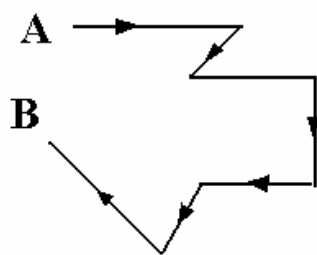


Рис. 2

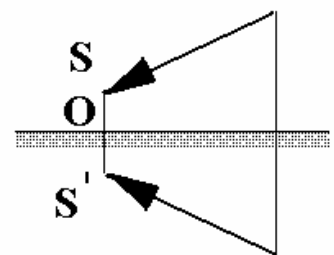


Рис. 3

*Законы отражения света* (рис. 1):

1) падающий ( $AO$ ) отраженный ( $OC$ ) лучи и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча ( $BO$ ), лежат в одной плоскости; 2) угол отражения равен углу падения  $\beta = \alpha$ .

*Законы преломления света* (рис. 1).

1) Лучи падающий ( $AO$ ), преломленный ( $OD$ ) и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча ( $BO$ ), лежат в одной плоскости.

2) Отношение синусов углов падения и преломления есть величина постоянная, равная относительному показателю преломления данных двух сред

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Световые лучи обладают свойством обратимости хода. Если световой луч, испущенный из точки  $A$  (рис. 2), двигаясь в прозрачной среде, попадет в точку  $B$ , в которой его направление распространения изменяют на противоположное, то он вновь попадет в исходную точку  $A$ , пройдя по той же самой траектории.

Каждая точка  $S$  источника света (монохроматического) в геометрической оптике считается центром расходящегося пучка лучей, который называется гомоцентрическим. Если после отражений и преломлений в различных средах пучок остается гомоцентрическим, то его центр  $S'$  называется изображением точки  $S$  в оптической системе. Изображение  $S'$  называется действительным, если в точке  $S'$  пересекаются сами лучи пучка, и мнимым, если в ней пересекаются продолжения этих лучей (в направлении, противоположном направлению распространения лучей).

Простейшая оптическая система — плоское зеркало. Для того, чтобы найти изображение точки ( $S$ ) в плоском зеркале, достаточно на продолжении перпендикуляра ( $OS$ ), опущенного из точки на зеркало, отложить за зеркалом такой же отрезок прямой ( $OS'$ ) (рис. 3). Геометрические размеры протяженного источника света и его мнимого изображения в плоском зеркале одинаковы.

Линза — прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. Прямую, проходящую через центры сферических поверхностей, называют главной оптической осью. Линза считается тонкой (тонкая линза), если ее толщина много меньше, чем

радиус ее поверхностей. Можно считать, что главная оптическая ось пересекает тонкую линзу в одной точке, называемой оптическим центром линзы. Оси, проходящие через центр линзы и не совпадающие с главной оптической осью, называются побочными осями. Во всех оптических инструментах используются тонкие пучки (т.е. пучки с малым углом раствора), идущие вблизи оптической оси системы. Такие пучки называются параксиальными.

Лучи параксиального светового пучка, распространяющегося параллельно главной оптической оси, пересекаются в точке, лежащей на этой оси и называемой главным фокусом линзы (слово «главный» часто опускают в тексте). У всякой тонкой линзы имеются два фокуса по обе стороны от нее на равных расстояниях от центра линзы. Плоскость, проведенная через фокус линзы перпендикулярно к главной оптической оси, называется фокальной. Расстояние от оптического центра линзы до ее главного фокуса называется фокусным расстоянием линзы  $F$ . Величина, обратная фокусному расстоянию  $D = 1/F$ , называется оптической силой линзы. Она измеряется в диоптриях [дптр] (дптр= $m^{-1}$ ). Лучи, падающие на линзу параллельно какой-либо побочной оптической оси, после преломления в линзе пересекаются в точке, лежащей на фокальной плоскости (побочный фокус).

Тонкие линзы по своим свойствам делятся на собирающие (рисунки 4 а) и рассеивающие (рисунки 4 б). Особенности прохождения лучей в собирающих линзах показаны на рисунках 4 а).

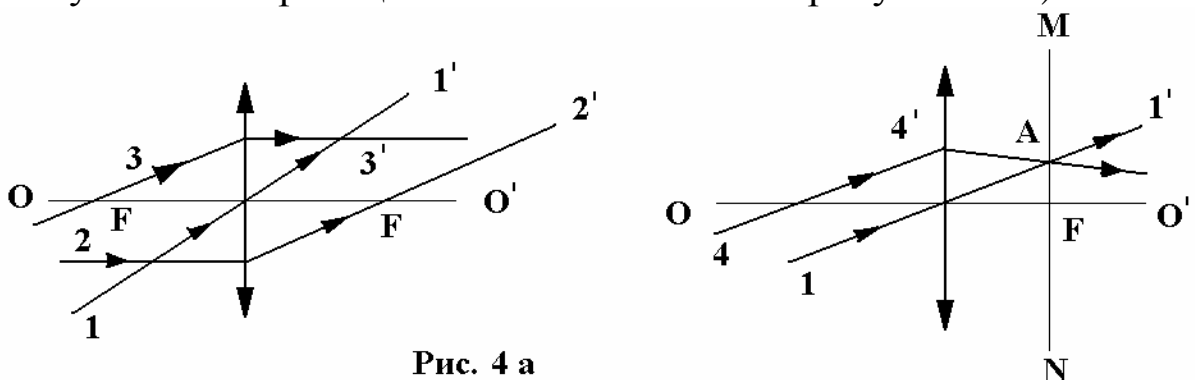


Рис. 4 а

Луч 1–1', проходящий через оптический центр тонкой линзы, не преломляется. Луч 2-2', падающий параллельно главной оптической оси  $OO'$ , после преломления пересекает главную оптическую ось в фокусе  $F$ . Если падающий луч 3-3' проходит через оптическую ось в фокусе, то после преломления он распространяется параллельно главной оптической оси. Параллельные лучи 1–1' и

4-4' после преломления пересекаются в точке  $A$ , лежащей на фокальной плоскости  $MN$  за линзой.

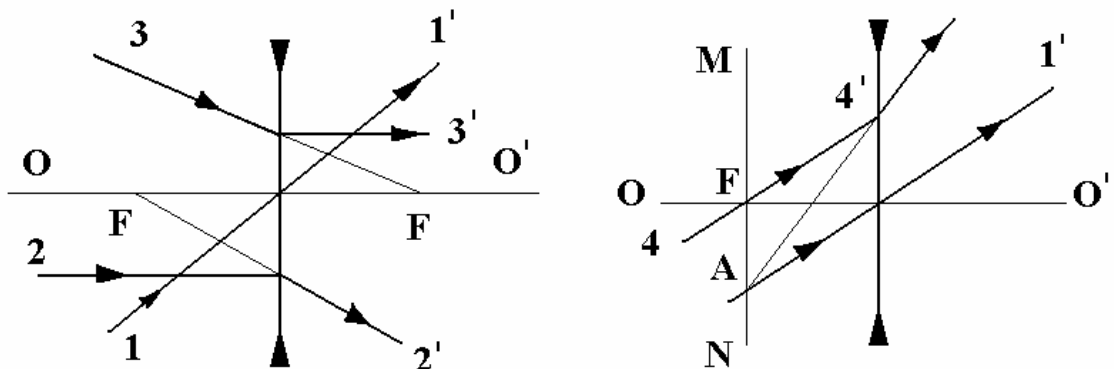


Рис. 4 б

Особенности прохождения лучей в рассеивающих линзах показаны на рисунках 4 б. Луч 1–1', проходящий через оптический центр тонкой линзы, не преломляется. Луч 2–2', падающий параллельно главной оптической оси  $OO'$ , после преломления распространяется таким образом, что его продолжение в противоположном направлении пересекает фокус, лежащий перед линзой. Если продолжение падающего луча 3–3' в направлении распространения пересекает фокус, лежащий за линзой, то после преломления луч распространяется параллельно главной оптической оси. Параллельные лучи 1–1' и 4–4' после преломления распространяются таким образом, что их продолжение в противоположном направлении пересекаются в точке  $A$  на фокальной плоскости  $MN$  перед линзой.

Изображение  $S'$  источника света  $S$ , получаемое с помощью тонкой рассеивающей линзы, — всегда мнимое (рис. 5 а). Изображение, получаемое с помощью тонкой собирающей линзы, может быть как мнимым (рис. 5 б), так и действительным (рис. 5 в).

Важное свойство тонкой линзы: изображением отрезка прямой линии является также отрезок прямой; отрезок прямой линии, ортогональный главной оптической оси, имеет в качестве изображения отрезок прямой, также ортогональный главной оптической оси (рис. б).

Линейным (поперечным) увеличением тонкой линзы  $\Gamma$  называется отношение:

$$\Gamma = \frac{A'B'}{AB}$$

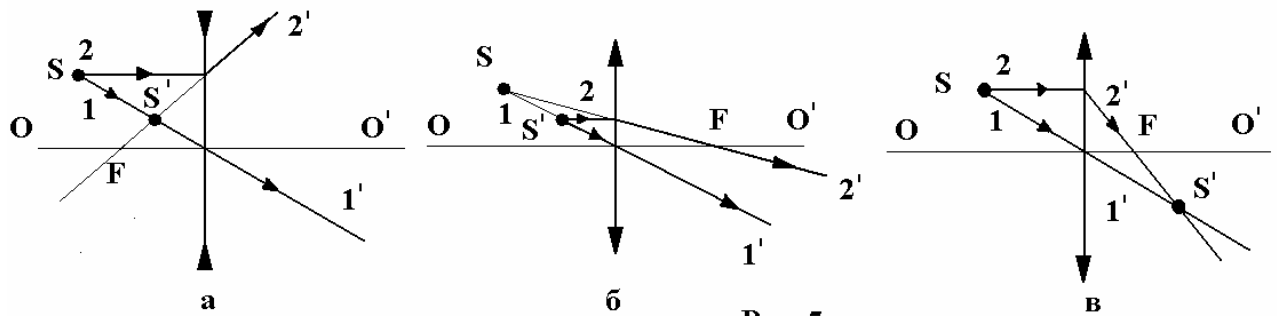


Рис. 5

где  $A'B'$  — изображение отрезка  $AB$ . По построению  $\Gamma = b/a$ , где  $a$  и  $b$  — расстояние от линзы до предмета ( $AB$ ) и до его изображения ( $A'B'$ ) соответственно (рис. 6).

Формула тонкой линзы:

$$\pm \frac{1}{F} = \pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b},$$

где  $F$  — фокальное расстояние линзы. В левой части знак «+» берется для собирающей линзы и знак «-» - для рассеивающей. Первое слагаемое в правой части

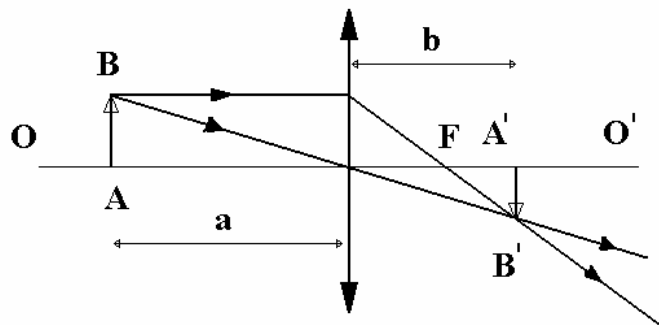


Рис. 6

берется со знаком «+» для реального предмета (источника расходящего пучка световых лучей) и знак «-» - для мнимого, т.е. сходящего пучка (сформированного в некоторой оптической системе), лучи которого (точнее их продолжения) пересекаются за линзой на расстоянии  $a$  от нее. Второе слагаемое в правой части берется со знаком «+», если изображение, формируемое линзой, — действительное и знак «-», если изображение — мнимое.

## 14.2. ЗАДАЧИ

1. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии  $d=30$  см от нее. Линза вставлена в отверстие радиусом  $r$  в непрозрачной ширме. По другую сторону линзы ставят экран так, что на нем получается четкое изображение источника. Когда экран перемещают к линзе на расстоянии  $a=5$  см, на экране наблюдается светлый круг радиусом

- $R = 1$  см. Найти радиус  $r$  отверстия в ширме, если фокусное расстояние линзы равно  $F = 10$  см.
2. Собирающая линза с фокусным расстоянием  $F = 6$  см вставлена в круглое отверстие радиусом  $r = 3$  см в непрозрачной ширме. Линза дает расходящийся пучок света, ось которого совпадает с главной оптической осью линзы, причем угол между крайними лучами пучка  $2\alpha = 90^\circ$ . Найти расстояние  $d$  от точечного источника света до линзы.
  3. Расстояние от предмета до экрана  $L = 2$  м. Определите фокусное расстояние линзы, помещенной между предметом и экраном, если резкое изображение предмета получается при двух положениях линзы, расстояние между которыми  $l = 1.2$  м.
  4. Собирающая линза дает четкое изображение предмета на экране, имеющее высоту  $H_1 = 9$  см. Оставляя неподвижными экран и предмет, перемещают линзу к экрану и находят, что при другом четком изображении предмета высота изображения равна  $H_2 = 4$  см. Найти высоту предмета  $h$ .
  5. Горящая свеча находится на расстоянии  $L = 40$  см от экрана. Помещая между экраном и свечой линзу с фокусным расстоянием  $F = 5$  см, можно получить на экране четкое изображение свечи при двух положениях линзы, находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Найти  $l$ .
  6. С помощью линзы получают действительное изображение предмета с увеличением  $\Gamma = 1,5$ . Затем линзу передвигают на расстояние  $l = 12$  см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.
  7. Тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $F = 40$  см лежит плоской стороной на плоском зеркале. На оптической оси линзы, на высоте  $d = 10$  см от нее находится светящаяся точка. Где находится изображение этой точки?
  8. Шарик массой  $m = 50$  г движется со скоростью  $v = 5$  м/с вдоль оптической оси собирающей линзы, установленной на подставке на гладком полу (рис. 7). После упругого удара шарика он отскакивает от линзы. Масса линзы с подставкой  $M = 0,2$  кг, фокусное расстояние  $F = 10$  см. Сколько времени будет существовать мнимое изображение шарика? Силой тяжести пренебречь.



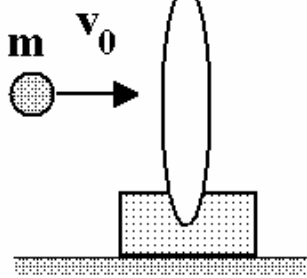


Рис. 7

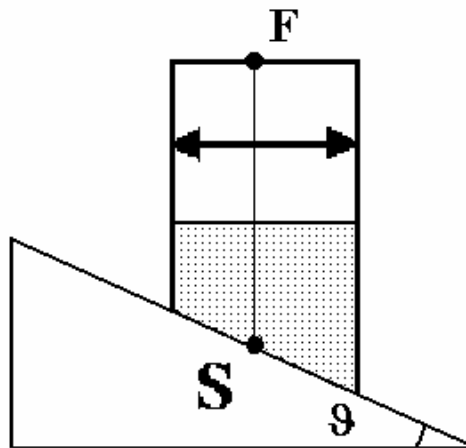


Рис. 8

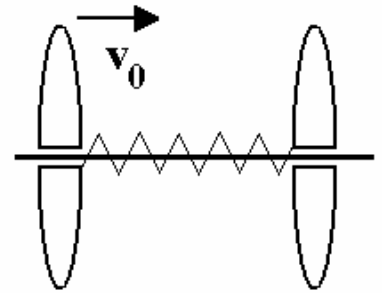


Рис. 9

9. Цилиндрический сосуд, закрытый с обоих торцов, поместили на наклонную плоскость, составляющую угол  $\theta = 30^\circ$  с горизонтом (рис. 8). В цилиндре находится собирающая линза с фокусным расстоянием  $F=10$  см. Фокальная плоскость совпадает с верхним торцом цилиндра. В сосуде находится жидкость с показателем преломления  $n = \sqrt{3}$ . Из точки  $S$  на дне цилиндра выходит вертикально луч света. На какое расстояние сместится след этого луча, когда цилиндр будет скользить без трения по наклонной плоскости?
10. Две одинаковые линзы с фокусным расстоянием  $F = 16$  см и массой  $m = 200$  г соединены пружиной жесткостью  $k = 15$  Н/м и могут свободно перемещаться по горизонтальному стержню. В начальный момент линзы покоятся, пружина не деформирована и имеет длину  $l_0 = 25$  см (рис. 9) Какую скорость  $v_0$  нужно сообщить одной из линз, чтобы в момент наибольшей деформации пружины изображение одной линзы в другой стало мнимым?
11. Собирающую линзу диаметра  $D=5$  см с фокусным расстоянием  $F=50$  см разрезали по диаметру пополам и половинки раздвинули на расстояние  $d=5$  мм. Точечный источник света  $S$  расположен на расстоянии  $a=1$  м от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.
12. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = 30$  см слева от нее на расстоянии  $d=70$  см. На каком расстоянии от рассеивающей линзы надо поместить справа от нее тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F_2 = 50$  см, чтобы из

системы выходил параллельный пучок света? Главные оптические оси линз совпадают.

13. Собирающая линза дает изображение предмета на экране. Между линзой и экраном параллельно плоскости линзы установлена стеклянная плоскопараллельная пластина толщиной  $d=4$  см с показателем преломления  $n=1,4$ . Как надо сместить экран, чтобы вновь получить отчетливое изображение предмета? Считать углы падения малыми.

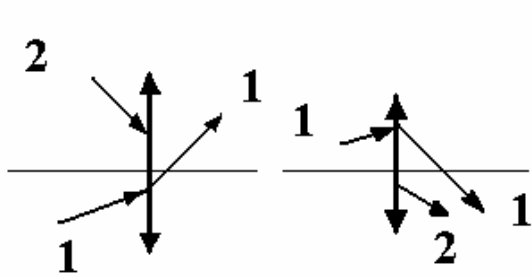


Рис.10

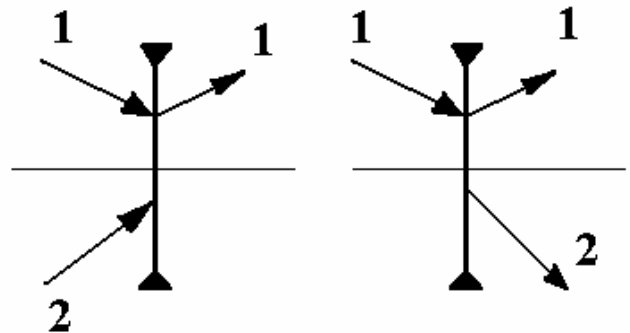


Рис.11

14. На рис. 10 изображен ход луча 1. Как идет луч 2?  
 15. На рис. 11 показан ход луча 1. Как идет луч 2?  
 16. На рис. 12 показаны главная оптическая ось, светящаяся точка  $A$  и ее изображение  $A_1$ . Определите положение линзы и ее фокуса. Постройте изображение точки  $C$ .  
 17. Построить изображение предметов, представленных на рис. 13.

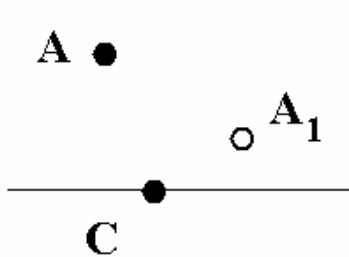


Рис.12

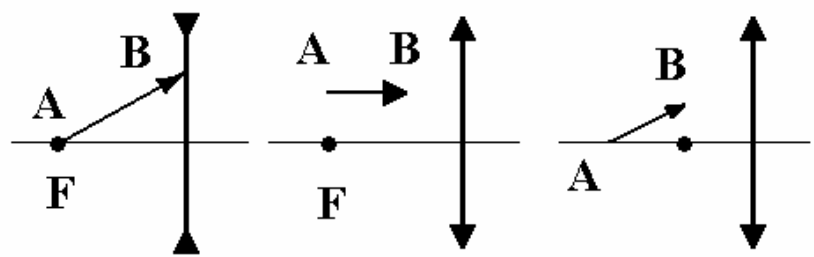


Рис.13

18. Построить изображение светящейся точки  $S$ , расположенной на главной оси собирающей линзы, если известен ход луча 1-1 (рис. 14)

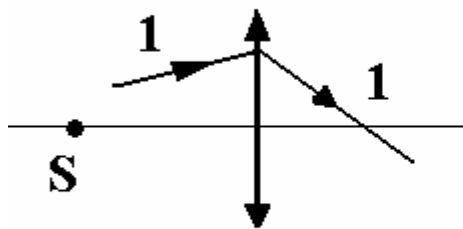


Рис.14

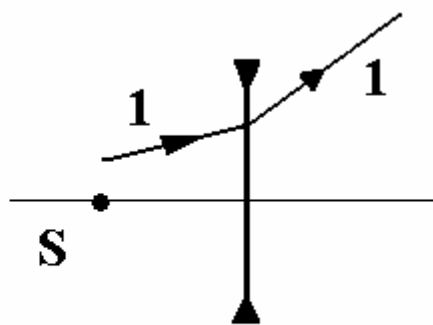


Рис.15

19. Построить изображение светящейся точки  $S$ , расположенной на главной оптической оси рассеивающей линзы, если известен ход луча 1-1 (рис. 15)

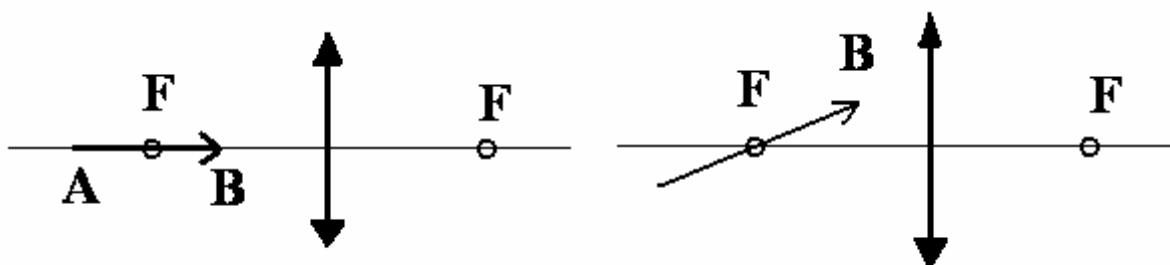


Рис.16

20. Построить изображение предметов в линзах, показанных на рис. 16.

### 14. 3. Примеры решения задач

**Пример 1.** В трубке длиной  $l = 80$  см, закрытой с обеих сторон, находится поршень с собирающей линзой, фокусное расстояние которой  $F = 19$  см (рис. 17). Когда трубка горизонтальна и неподвижна, поршень находится посередине и давление газа в обеих частях  $p_0 = 1,5$  мм рт. ст. С каким ускорением надо двигать трубку в горизонтальном направлении, чтобы изображение источника света  $S$  оказалось на заднем торце трубки. Масса поршня с линзой  $m = 30$  г, площадь сечения трубки  $S = 25$  см<sup>2</sup>. Трение отсутствует, поршень

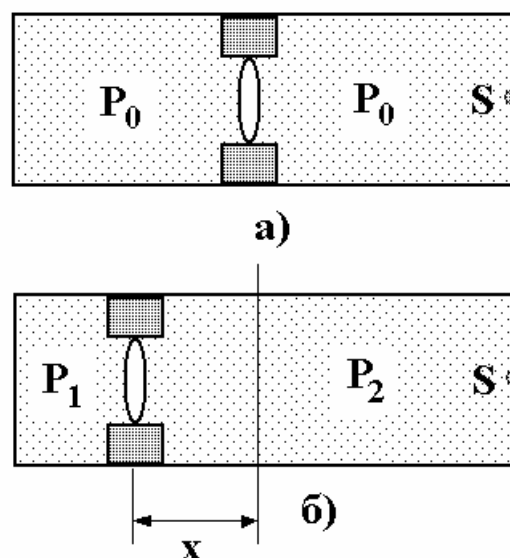


Рис.17

газ не пропускает, температура системы постоянна.

Два положения линзы показаны на рис. 17 а) и б). При движении цилиндра вправо с ускорением  $a$  линза из-за инерции «сдвигается» влево на расстояние  $x$ . Уравнение, описывающее изотермический переход «левого» газа из состояния, изображенного на рис. 17 а), в состояние, изображенное на рис. 17 б), имеет вид

$$p_0 \frac{l}{2} S = p_1 \left( \frac{l}{2} - x \right) S.$$

Аналогичное уравнение для «правого» газа

$$p_0 \frac{l}{2} S = p_2 \left( \frac{l}{2} + x \right) S,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  - давления газа в левой и правой частях цилиндра при его ускоренном движении.

Уравнение Ньютона для поршня имеет вид

$$(p_1 - p_2) = ma.$$

Последнее уравнение – формула линзы, описывающая взаимное расположение источника и изображения, о котором говорится в условии задачи

$$\frac{1}{\frac{l}{2} + x} + \frac{1}{\frac{l}{2} - x} = \frac{1}{F}.$$

Решение системы уравнений дает следующее выражение для ускорения поршня

$$a = \frac{p_0 S}{F} \sqrt{\left( \frac{l}{2} \right)^2 - lF}.$$

**Пример 2.** На клин с углом раствора  $\alpha = 1^\circ$  и показателем преломления  $n=1,5$  нормально к его грани  $AB$  падает параллельный пучок света. За клином расположена собирающая линза с фокусным расстоянием  $F=180$  см. Грань  $AB$  перпендикулярна оптической оси линзы. В фокальной плоскости линзы находится экран. На сколько сместится

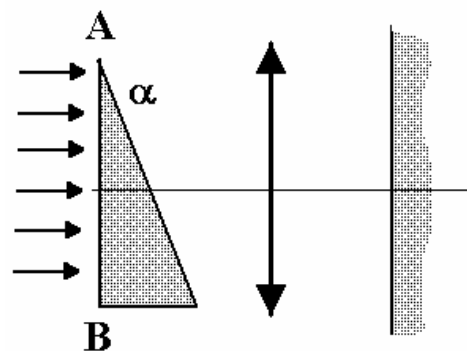
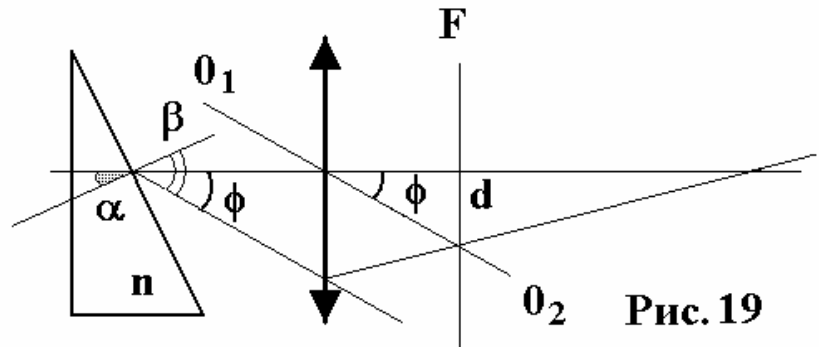


Рис. 18

светлая точка на экране, если клин убрать?

Без клина параллельный пучок света собирается в фокальной плоскости линзы (точка F на рис. 19).  
Ход одного из лучей в присутствии клина показан на рис. 19.



$O_1O_2$  - побочная оптическая ось, параллельная лучу, прошедшему через клин,  $\alpha$  - угол падения луча,  $\beta$  - угол преломления, связанные между собой законом Снеллиуса

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Показанный на рис. 19 угол  $\phi$  связан с  $\beta$  соотношением

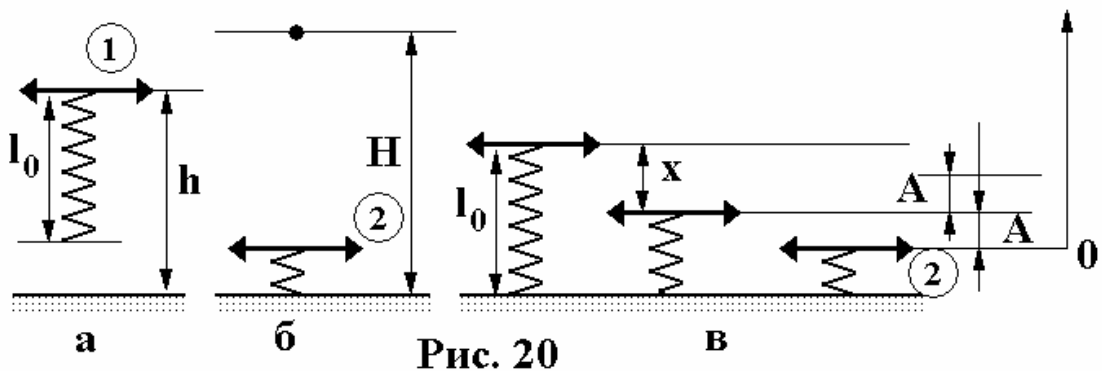
$$\phi = \beta - \alpha = \arcsin(n \sin \alpha) - \alpha.$$

Смещение луча  $d$  и соответственно смещение пятна

$$d = F \operatorname{tg} \phi,$$

где  $F$  - фокусное расстояние линзы.

**Пример 3.** Собирающая линза массой  $m$  соединена с легкой пружиной жесткостью  $k$  пренебрежимо малой массы. Линзу располагают на высоте  $h$  от пола (рис. 20) и отпускают. Найти фокусное расстояние линзы, если известно, что в момент наибольшего сжатия пружины на полу образуется отчетливое изображение лампы, подвешенной на высоте  $H$  от пола. Длина недеформированной пружины  $l_0$ .



После падения груз начинает колебаться с амплитудой  $A$  относительно положения равновесия пружины с находящейся на ней массивной линзой. Это положение равновесия изображено на рис. 20 в), оно немного ниже (на  $x$ ) положения линзы непосредственно перед касанием пружины пола. Величина  $x$  определяется из условия равновесия линзы

$$mg = kx.$$

В качестве уровня отсчета потенциальной энергии выберем уровень, соответствующий наинизшему возможному положению линзы. Тогда закон сохранения энергии применительно к состояниям 1 и 2, показанным на рис. 20, имеет вид

$$mg(h - l_0 + x + A) = \frac{k(x + A)^2}{2}.$$

Решение системы уравнений дает

$$A = \sqrt{\frac{mg}{k}(2h - 2l_0 + mg/k)}.$$

Фокусное расстояние линзы без труда находится из формулы тонкой линзы, которая в условиях задачи выглядит следующим образом

$$\frac{1}{l_0 - x - A} + \frac{1}{H - (l_0 - x - A)} = \frac{1}{F}.$$

## 15. ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА

### 15. 1. Основные понятия

В рамках волновой оптики распространение в различных средах и взаимодействие электромагнитного излучения, в том числе и света, рассматривается с учетом волновых свойств излучения. Волновое приближение полезно в тех случаях, когда длина волны становится сравнимой с размерами приборов. Длина световой (электромагнитной) волны  $\lambda$  в веществе с показателем преломления  $n$  уменьшается по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$  в вакууме:  $\lambda = \lambda_0 / n$ , это связано с тем, что скорость распространения волны в веществе уменьшается в  $n$  раз, тогда как частота колебаний электромагнитного поля в нем остается неизменной.

*Оптической длиной пути* волны называется произведение  $nd$ , где  $n$  — показатель преломления среды,  $d$  — геометрическая длина пути волны. Разность  $\delta$  оптических путей лучей, испущенных двумя источниками, называется *оптической разностью хода*.

$$\delta = n_2 d_2 - n_1 d_1.$$

При наложении некогерентных световых волн происходит только усиление света. Результатом наложения когерентных волн является *интерференция*, при этом становится возможным наблюдение, например на экране, *интерференционной картины*, т.е. устойчивого перераспределения интенсивности света. Условие усиления волн от двух когерентных источников (условие интерференционного максимума):

$$\delta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Условие ослабления волн от двух когерентных источников (условие интерференционного минимума):

$$\delta = (2m + 1)\lambda / 2.$$

Расстояние между интерференционными полосами на экране, расположенном параллельно плоскости, содержащей два когерентных источника света

$$\Delta x = \lambda \frac{l}{d},$$

где  $\lambda$  - длина волны света,  $l$  - расстояние от экрана до источников света,  $d$  - расстояние между источниками.

Условие возникновения максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от тонкой пластинки толщиной  $d$  для максимумов -

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \lambda/2 = 2m\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

для минимумов -

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \lambda/2 = (2m + 1)\lambda/2, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - угол падения света. Слева в обеих формулах стоит оптическая разность хода интерферирующих волн с учетом поправки, связанной с отражением одной из волн от оптически более плотной среды.

При интерференции проходящего света в тонких пленках условия возникновения максимумов и минимумов обратны условиям для отраженного света.

Радиусы светлых *колец Ньютона* в отраженном свете (кольца образуются при интерференции света, отраженного от воздушной прослойки между стеклянной пластикой и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью линзы радиусом  $R$ )

$$r_m = \sqrt{R\lambda\left(m + \frac{1}{2}\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

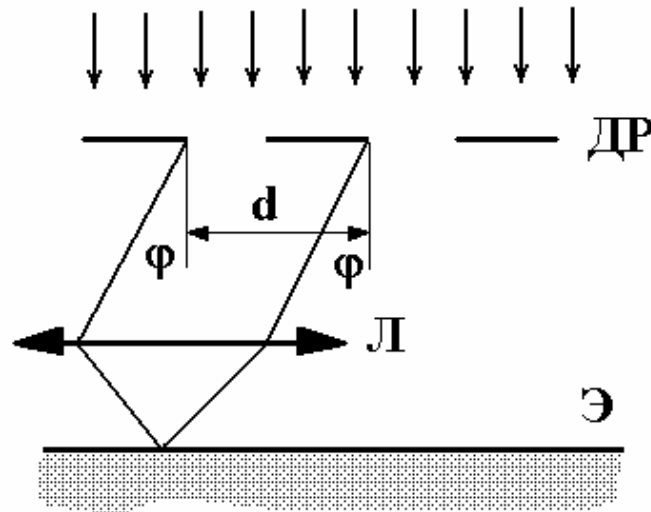
где  $m$  - номер кольца.

Радиусы темных колец определяются выражением

$$r_m = \sqrt{R\lambda m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Значению  $m = 0$  соответствует середина центрального темного пятна. В проходящем свете расположение светлых и темных колец обратно их расположению в отраженном свете.

Устройство, состоящее из большого числа регулярно расположенных щелей, получило название дифракционной решетки (рис. 1).



**Рис. 1**

По *принципу Гюйгенса — Френеля* каждая щель является источником когерентных вторичных волн, способных интерферировать друг с другом. Если на дифракционную решетку (ДР) перпендикулярно к ней падает пучок параллельных лучей света (плоская световая волна), то под углом дифракции  $\varphi$  на экране (Э), расположенном в фокальной плоскости линзы (Л), будет наблюдаться интерференционная картина. Интерференционные максимумы при



дифракции на решетке будут наблюдаться под углами  $\varphi$ , удовлетворяющими условию:

$$d \sin \varphi = n\lambda ,$$

где  $n = 0, 1, 2 \dots$  называется порядком максимума или порядком спектра,  $d$  называется постоянной (периодом) дифракционной решетки.

*Поляризация света* – явление выделения из всей совокупности направлений колебаний вектора **Е** естественного света единственной плоскости колебаний. Один из способов создания поляризованного света – пропускание естественного света через специальные приборы или среды, называемые поляризаторами. Диаграммы распределения вектора **Е** падающего на нас естественного, плоско поляризованного и частично поляризованного света показаны на рис. 2. Интенсивность естественного света  $I$ , прошедшего через поляризатор

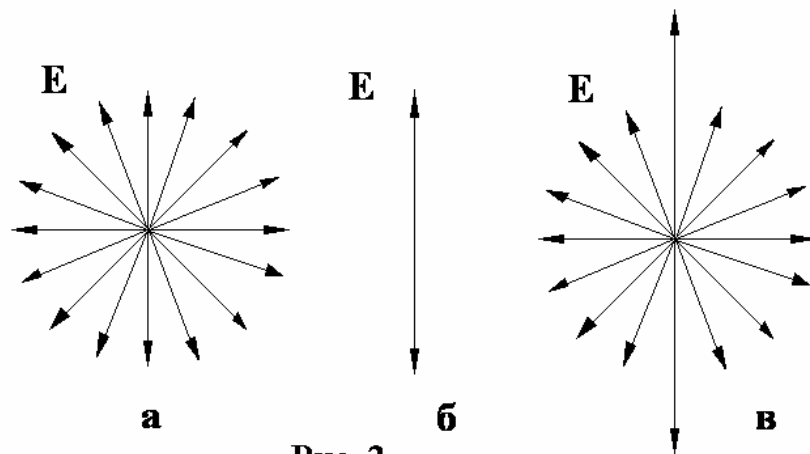


Рис. 2

$$I = \frac{I_0}{2},$$

где  $I_0$  - интенсивность падающего света. То же самое для плоско поляризованного света:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi ,$$

где  $\varphi$  - угол между осью пропускания поляризатора и плоскостью колебаний вектора **Е** падающего света.

Степенью поляризации частично поляризованного света, изображенного на рис. 2 в), называется отношение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} .$$

Приближение *квантовой оптики* используется при описании тех особенностей взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, которые можно объяснить, отвлекаясь от волновой природы излучения. В квантовой оптике электромагнитное излучение (свет) рассматривается как поток частиц - фотонов, не обладающих массой покоя и движущихся со скоростью света. Основными характеристиками фотона являются его энергия  $\varepsilon$  и импульс  $p$ :

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h}{\lambda_0},$$

где  $\nu(\omega)$  - частота (циклическая частота) электромагнитной волны,  $h$  ( $\hbar = h/2\pi$ ) - постоянная Планка ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с).

*Фотоэффект* — явление взаимодействия света с веществом, в результате которого энергия фотонов передается электронам вещества. Уравнение Эйнштейна

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A,$$

где  $mv_{\max}^2/2$  - наибольшая кинетическая энергия фотоэлектронов,  $A$  - работа выхода электронов, представляет собой закон сохранения энергии при внешнем фотоэффекте. Минимальную частоту  $\nu_0 = A/h$ , при которой еще возможен внешний фотоэффект, называют *красной границей фотоэффекта*.

## 15. 2. Задачи

1. На мыльную пленку с показателем преломления  $n=1,33$  падает нормально параллельный пучок белого света. При какой наименьшей толщине пленки  $d$  отраженный свет будет окрашен в желтый цвет ( $\lambda=600$  нм)? Наблюдение ведется: а) в отраженном свете, б) в проходящем свете.
2. На узкую щель между двумя плоскими стеклянными пластинами падает нормально пучок лучей белого света. При какой наименьшей толщине щели, проходящий свет с длиной волны  $\lambda = 0,55$  мкм окажется максимально усиленным в результате интерференции?
3. На стеклянный клин ( $n=1,4$ ) нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм. В возникшей

- при этом интерференционной картине на отрезке длиной  $l = 1$  см наблюдается 10 интерференционных полос. Определить преломляющий угол клина.
4. На тонкий стеклянный клин ( $n=1,55$ ) падает нормально монохроматический свет. Двугранный угол между поверхностями клина равен  $\alpha = 2'$ . Определить длину световой волны, если расстояние  $b$  между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,3 мм.
  5. На стеклянный клин падает нормально пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 582$  нм. Угол клина  $\beta = 8'$ . В проходящем свете наблюдаются интерференционные полосы с интервалом  $b=0,08$  мм. Определить показатель преломления стекла.
  6. Кольца Ньютона наблюдаются на установке, состоящей из стеклянной пластины и линзы с радиусом кривизны  $R=8,6$  м. Определить длину волны, падающего нормально света, если известно, что в проходящем свете диаметр четвертого темного кольца  $d=9$  мм.
  7. Установка для получения колец Ньютона состоит из плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны  $R=6,4$  м и стеклянной пластины. В отраженном свете, падающем нормально, радиусы соседних темных колец равны соответственно  $r=4,0$  мм и  $r=4,38$  мм. Найти порядковые номера колец.
  8. На дифракционную решетку, содержащую  $n=500$  штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет ( $\lambda=582$  нм). Найти общее число дифракционных максимумов. Определить угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.
  9. На дифракционную решетку падает нормально белый свет. Какова будет длина волны линии в спектре третьего порядка, которая наложится на красную линию с длиной волны  $\lambda = 660$  нм в спектре второго порядка?
  10. На пути частично-поляризованного света, степень поляризации которого  $P=0,6$ , поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол  $\alpha = 30^\circ$ ?
  11. Интенсивность естественного света, прошедшего через два поляризатора, уменьшилась в  $n=4$  раза. Найти угол между плоскостями пропускания поляризаторов.

12. При падении естественного света на некоторый поляризатор проходит  $n_1=30\%$  светового потока, а через два таких поляризатора –  $n_2=13,5\%$ . Найти угол между плоскостями пропускания этих поляризаторов.
13. На пути частично поляризованного света поместили поляризатор. При повороте поляризатора на угол  $60^\circ$  из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность прошедшего света уменьшилась в  $n=3,0$  раза. Найти степень поляризации падающего света.
14. На поляризатор падает пучок частично-поляризованного света. При некотором положении поляризатора интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания поляризатора повернули на угол  $\alpha = 45^\circ$ , интенсивность света возросла в 2 раза. Определить степень поляризации света  $P$ .
15. Красной границе фотоэффекта для алюминия соответствует длина волны  $\lambda_{кр}=332$  нм. Найдите длину волны, при которой фотоэлектроны, вырываемые с поверхности алюминиевого катода в вакуумной диоде, не достигают анода под действием задерживающего напряжения  $U_3=1$  В.
16. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длиной волны  $\lambda = 350$  нм и  $\lambda = 540$  нм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются в  $n=2$  раза. Найдите работу выхода электрона с поверхности этого металла.
17. Определите максимальное число электронов, которые можно удалить с поверхности уединенного цинкового шара с емкостью  $C=20$  пФ, если его облучать светом с длиной волны  $\lambda = 324$  нм. Работа выхода электрона для цинка  $A_{вых} = 3 \cdot 10^{-19}$  Дж.
18. Определите силу тока насыщения для фотоэлемента с цезиевым катодом. Поток световой энергии, падающей на фотоэлемент  $P=1,0$  мВт. Задерживающее напряжение для этого излучения  $U_3=0,07$  В, красная граница фотоэффекта для цезия  $\lambda_{кр}=650$  нм. Считать, что каждый падающий на катод фотон вызывает появление фотоэлектрона.
19. Под действием света с длиной волны  $\lambda=140$  нм фотоэлектрон вылетает с поверхности медного шарика радиусом  $R = 50$  мм, имеющего заряд  $Q = 1,1 \cdot 10^{-10}$  Кл. Считая, что электрон выле-

тел в радиальном направлении, найдите максимальное расстояние, на которое он удалится от поверхности шарика. Работа выхода электрона из меди  $A = 7,2 \cdot 10^{-19}$  Дж.

20. В однородном поперечном магнитном поле с индукцией  $B = 8 \cdot 10^{-3}$  Тл фотоэлектроны с максимальной энергией, вырываемые с поверхности металла квантами с длиной волны  $\lambda = 73$  нм, описывают окружности радиуса  $R = 1,5$  мм. Найдите работу выхода электрона из металла.

### 15.3 Примеры решения задач

**Пример 1.** На стеклянный ( $n = 1,5$ ) клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,6$  (см. рис. 3). В возникшей при этом интерференционной картине на отрезке длиной  $l = 1$  см наблюдается 10 полос. Определить преломляющий угол клина  $\theta$ .

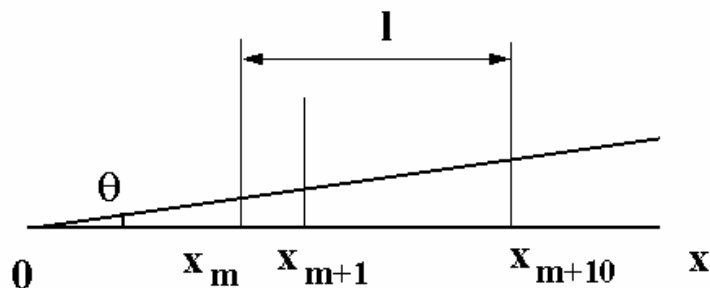


Рис. 3

Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти пучки когерентны, поэтому наблюдается устойчивая картина интерференции. Так как интерференционные полосы наблюдаются при малых углах клина, то отраженные от верхней и нижней граней клина лучи света будут практически параллельны.

Оптическая разность хода определяется левой частью формулы (1), где достаточно положить  $\alpha = 0$ :

$$2d(x)n - \frac{\lambda}{2}.$$

Мы учли, что толщина клина меняется в зависимости от координаты  $x$  (начало отсчета совмещается с вершиной клина) по закону

$$d(x) = x \operatorname{tg} \theta \approx x \theta$$

Темные полосы видны на тех участках клина  $x_m$ , для которых разность хода кратна нечетному числу половины длин волны. Отсюда

$$x_m = (m+1) \frac{\lambda}{2n\theta}.$$

По условию  $l = x_{m+10} - x_m$ , откуда

$$\theta = \frac{5\lambda}{nl} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 0,01146^\circ.$$

**Пример 2.** Пучок частично поляризованного света рассматривается через пластинку поляризатора. Первоначально пластинка установлена так, что интенсивность проходящего света максимальна. При повороте пластинки на угол  $\varphi = 60^\circ$  интенсивность пропускаемого света уменьшается в  $k = 2$  раза. Определить отношение интенсивностей естественного  $I_e$  и линейно поляризованного  $I_p$  света, составляющих данный частично поляризованный свет, а также степень поляризации  $P$  пучка света. Потерями в поляризаторе пренебречь.

При первоначальном положении пластинки она полностью пропускает линейно поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность пропущенного при этом света  $I_{\max} = I_p + I_e / 2$ .

При втором положении пластинки интенсивность линейно поляризованного света определяется по закону Малюса, а интенсивность пропущенного естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на пластинку. Общая интенсивность во втором случае:  $I_2 = I_p \cos^2 \varphi + I_e / 2$ . По условию задачи  $I_{\max} = kI_2$ , откуда

$$I_p = \frac{I_e}{2} k \left( I_p \cos^2 \varphi + \frac{I_e}{2} \right),$$

так что

$$\frac{I_e}{I_p} = 2 \frac{1 - k \cos^2 \varphi}{k - 1} = 1.$$

Интенсивности поляризованного и естественного света в данном случае равны между собой.

Минимальная интенсивность на выходе получится при повороте пластинки на угол  $90^0$ , когда поляризованный свет будет полностью задержан:  $I_{\min} = I_e / 2$ . Степень поляризации частично поляризованного света определяется соотношением

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_p - I_e}{I_p + I_e} = \frac{1}{2}.$$

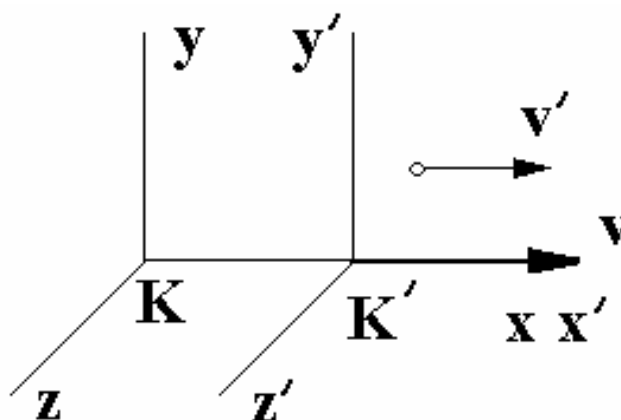
## 16. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

### АТОМНАЯ ФИЗИКА. СТРОЕНИЕ ЯДРА. РАДИОАКТИВНОСТЬ.

#### 16. 1. Основные положения

Релятивистская механика (*специальная теория относительности*) описывает движение тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме  $c$ . В ее основе лежат два постулата:

- 1) в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают одинаково;
- 2) во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме одинакова и не зависит от скорости движения источника света.



**Рис. 1**

В характерных для теории относительности задачах рассматриваются две инерциальные системы отсчета - неподвижная с осями

$(x, y, z)$  система  $K$  (лабораторная система отсчета) и движущаяся относительно нее со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  система  $K'$  с осями  $(x', y', z')$  (рис. 1). Установлено:

1) события (явления), одновременные в одной инерциальной системе отсчета, не являются одновременными в другой системе отсчета, т.е. понятие одновременности является относительным.

Промежуток времени между двумя событиями является относительным:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где  $\Delta t_0$  - промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке системы отсчета  $K'$ , измеренный по часам этой системы (собственное время),  $\Delta t$  - промежуток времени между двумя этими же событиями, измеренный по часам системы  $K$ .

2) линейный размер  $l_0$  тела, движущегося вдоль оси  $x$ , измеренный в системе отсчета  $K$ , связан с длиной того же тела  $l$ , измеренной в системе отсчета  $K'$  (собственная длина), соотношением

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

3) релятивистский закон сложения скоростей:

$$u = \frac{v' + v}{1 + v'v/c^2},$$

где  $v'$  - скорость тела относительно системы  $K'$ ,  $u$  - скорость тела относительно системы  $K$ ,  $v$  - скорость системы  $K'$  относительно системы  $K$ .

4) релятивистское выражение для энергии  $E$  и импульса  $p$  частицы с массой  $m$ :

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \tag{1}$$

$$p = \frac{vE}{c^2}. \tag{2}$$

Корень квадратный из первого слагаемого в первой строчке называют энергией покоя, второе – энергией движения.

Эту систему уравнений можно записать одним уравнением

$$E = m_v c^2,$$

если ввести зависящую от скорости массу частицы



$$m_v = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Массу  $m$  в этом случае называют массой покоя частицы, массу  $m_v$  - релятивистской массой.

Кинетической энергией релятивистской частицы называется величина

$$T = E - mc^2.$$

Релятивистский импульс частицы  $p$  можно также записать в виде

$$p = m_v v = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, находясь на которых, они, несмотря на наличие у них ускорения, не излучают электромагнитные волны.

Эти орбиты соответствуют стационарным состояниям электронов в атоме и определяются условием

$$mv_n r_n = \frac{nh}{2\pi},$$

где  $m$  - масса электрона,  $r_n$  - радиус  $n$ -ой орбиты ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $v_n$  - скорость электрона на этой орбите,  $mv_n r_n$  - момент импульса движения электрона на этой орбите,  $h$  - постоянная Планка.

Атом излучает или поглощает квант электромагнитной энергии (фотон) при переходе из одного стационарного состояния в другое. Энергия этого кванта  $h\nu = W_1 - W_2$  равна разности энергий атома до и после перехода.

Энергия атома в стационарном состоянии

$$W = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2},$$

$\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума.

Энергетический уровень – графическое изображение значений энергии стационарных состояний атома. Схема расположения энергетических уровней атома водорода представлена на рис. 2. Энергия необходимая, чтобы удалить электрон из атома, называется энергией ионизации (рис. 2).  $E_i = 13,6$  эВ,  $1$  эВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

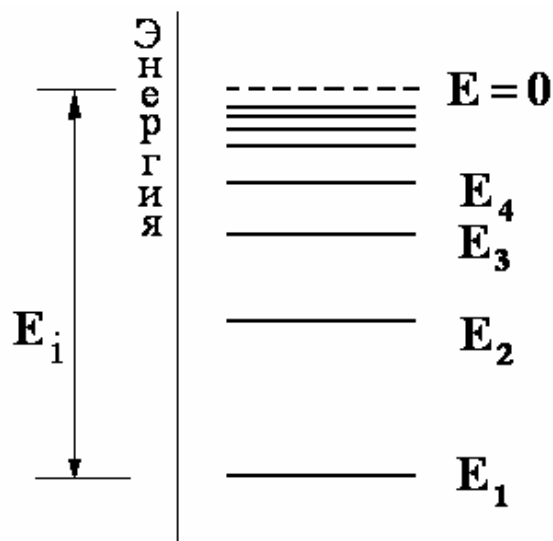


Рис. 2

Атом в основном стационарном состоянии может только поглощать кванты энергии, а в возбужденном – как поглощать, так и испускать.

Совокупность частот (или длин волн) возможных переходов атома определяет спектр атома. Атомные спектры – линейчатые. Длины волн такого спектра для атома водорода описываются формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где  $n_2 > n_1$  - номера орбит,  $R = 1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup> – постоянная Ридберга.

*Ядро* — устойчивая система нуклонов: протонов и нейтронов. Его важнейшие характеристики — заряд  $Z$  и масса  $M_{\text{я}}$ . Ядро обозначается символом  ${}^A_Z X$ , где  $X$  – символ химического элемента,  $Z$  – атомный номер (число протонов в ядре или зарядовое число),  $A$  – массовое число (число нуклонов в ядре). Число нейтронов в ядре  $n = A - Z$ .

Нуклоны в ядре связаны между собой особыми силами притяжения — ядерными силами. Их свойства: короткодействующие, зарядовонезависимые, обладают насыщением.

Ядра легких элементов наиболее устойчивы. Тяжёлые ядра, перегруженные нейтронами, неустойчивы и способны к самопроизвольному распаду, образуя новые ядра и частицы. Такое свойство ядер называется радиоактивностью.

При радиоактивном распаде возникает излучение трёх видов:  
 $\alpha$  -излучение — поток ядер атомов гелия;  
 $\beta$  -излучение — поток быстрых электронов или позитронов;  
 $\gamma$  -излучение — поток фотонов высокой частоты.

*Закон радиоактивного распада:*

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

или

$$N = N_0 2^{-t/T},$$

где  $N_0$  - начальное число ядер,  $N$  - конечное число ядер в момент времени  $t$ ,  $T = \ln 2 / \lambda$  - период полураспада – время, в течение которого количество атомов исходного элемента уменьшится вдвое,  $\lambda$  - постоянная распада.

Среднее время жизни радиоактивного атома  $\tau = 1 / \lambda$ , или

$$\tau = \frac{T}{\ln 2}.$$

*Активность элемента*

$$a = \lambda N.$$

*Ядерная реакция* — процесс превращения атомных ядер, обусловленный воздействием на них быстрых элементарных частиц. В ходе ядерной реакции выполняются законы сохранения: числа нуклонов, электрического заряда, полной релятивистской энергии, механического импульса.

*Дефект масс  $\Delta m$*  — разность между суммой масс покоя нуклонов и массой ядра  $M_{\text{я}}$ :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}.$$

*Энергия связи ядра*

$$\Delta E_{\text{св}} = \Delta m c^2.$$

## 16.2. ЗАДАЧИ

1. При какой скорости кинетическая энергия элементарной частицы равна ее энергии покоя?
2. Нейтрон, летящий со скоростью  $v_1 = 10^8$  м/с относительно наблюдателя  $A$ , испускает в направлении своего полета электрон, движущийся со скоростью  $v_2 = 2,8 \cdot 10^8$  м/с относительно этого нейтрона. Чему равна скорость электрона

- нейтрона. Чему равна скорость электрона относительно наблюдателя  $A$ ?
3. Суммарная площадь поверхности неподвижного тела, имеющего форму куба, равна  $S_0$ . С какой скоростью относительно наблюдателя должно двигаться тело в направлении одного из своих ребер, чтобы площадь суммарной поверхности тела уменьшилась в полтора раза вследствие релятивистского сокращения длин?
  4. Релятивистская частица с массой покоя  $m_0$  и кинетической энергией  $T$  налетает на покоящуюся частицу такой же массы. Найдите массу покоя  $M$  составной частицы, образовавшейся в результате соударения.
  5. В лабораторной системе отсчета удаляются друг от друга две частицы с одинаковыми по модулю скоростями. Их относительная скорость в той же системе отсчета равна  $0,5c$ . Определить скорости частиц.
  6. В лабораторной системе отсчета пи-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние  $l = 75$  м. Скорость пи-мезона равна  $0,995c$ . Определить собственное время жизни частицы.
  7. Кинетическая энергия  $T$  электрона равна  $1$  МэВ. Определить скорость электрона.
  8. Релятивистская частица массой  $m$  испытывает упругое соударение с неподвижной частицей такой же массы. Найти кинетическую энергию  $T_1$  рассеянной частицы, если известны кинетическая энергия  $T_0$  налетающей частицы и угол рассеяния.
  9. Найти полную энергию электрона, находящегося на третьем энергетическом уровне атома водорода. Энергия ионизации  $E_i = 2,18 \cdot 10^{-18}$  Дж.
  10. Определить кинетическую, потенциальную и полную энергию электрона, находящегося на первой орбите в атоме водорода.
  11. Определить частоту света  $\nu$ , соответствующую фотону, испущенному атомом водорода при переходе электрона с третьей орбиты на вторую. Энергия ионизации  $E_i = 2,18 \cdot 10^{-18}$  Дж.
  12. Протон, летящий со скоростью  $v_0 = 4,6 \cdot 10^4$  м/с сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После столкновения протон движется в обратном направлении со скоростью

$v = v_0/2$ , а атом переходит в возбужденное состояние. Найти длину волны света, излучаемого атомом гелия при возвращении в первоначальное состояние.

13. Определить наименьшую и наибольшую длины волн излучаемого фотона в ультрафиолетовой серии Лаймана спектра атома водорода.
14. Активность радиоактивного элемента уменьшилась в 4 раза за 8 дней. Найдите период полураспада.
15. Известно, что  $M=1$  г радия за время  $\tau = 1$  с дает  $3,7 \cdot 10^{10}$  ядер гелия. Каково будет давление гелия, образующегося в герметичной ампуле объема  $V = 1 \text{ см}^3$ , в которой в течение года находилось  $m = 100$  мг радия? Температура ампулы  $t = 15^\circ \text{C}$ .
16. При распаде радиоактивного изотопа  $^{210}\text{Po}$  в течение времени  $t = 1$  ч образовался  $^4\text{He}$ , который при нормальных условиях занял объем  $V = 89,5 \text{ см}^3$ . Определить период полураспада.
17. В микрокалориметр с теплоемкостью  $C=100$  Дж/К помещена масса  $M=1$  мг изотопа кремния (атомная масса  $A=31$ ). При распаде ядра  $^{31}\text{Si}$  выделяется энергия  $Q = 4,4 \cdot 10^{-19}$  Дж. Период полураспада изотопа кремния  $T=2$  часа 36 мин. На сколько повысится температура калориметра через 52 минуты после начала опыта?
18. Чтобы определить возраст древней ткани, была измерена в ней концентрация атомов радиоуглерода  $^{14}\text{C}$ . Она оказалась соответствующей 9,2 распадам в минуту на один грамм углерода. Концентрация  $^{14}\text{C}$  в живых растениях соответствует 14 распадам в минуту на один грамм углерода. Период полураспада  $^{14}\text{C}$  равен 5730 лет. Определить возраст ткани.
19. Вычислить дефект массы  $\Delta m$  и энергию связи  $E_{св}$  ядра  $^{11}_5\text{B}$ .
20. Определить энергию  $E$ , которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра  $^{23}_{11}\text{Na}$ .

### 16.3. Примеры решения задач

**Пример 1.** *Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями  $v_1 = 0,6c$  и  $v_2 = 0,9c$  вдоль одной прямой. Определить их относительную скорость в*

двух случаях: 1) частицы движутся в одном направлении; 2) частицы движутся в противоположных направлениях.

Собственная скорость частицы  $v_1'$  в системе отсчета, которая движется со скоростью  $u$  относительно лабораторной системы отсчета

$$v_1' = \frac{v_1 - u}{1 - v_1 u / c^2},$$

где  $v_1$  - скорость этой частицы относительно лабораторной системы отсчета.

В качестве движущейся системы возьмем систему, движущуюся со скоростью  $v_2$ . Тогда  $v_1'$  и будет относительной скоростью частиц, т.е.

$$v_1' = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1 v_2 / c^2}.$$

В случае, когда частицы движутся в противоположных направлениях их относительная скорость

$$v_1' = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

**Пример 2.** Вычислить массу двух одинаковых фотонов, движущихся: а) параллельно друг другу, б) антипараллельно.

Обозначим  $E$  энергию каждого из фотонов,  $\mathbf{p}$  - импульс. В первом случае энергия пары фотонов  $2E$ , импульс  $2\mathbf{p}$ . Из формулы (1) введения следует, что

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{\mathbf{p}^2}{c^2}$$

или, используя формулу (2), где  $v = c$ ,

$$m^2 = \frac{(2E)^2}{c^4} - \frac{(2p)^2}{c^2} = \frac{4E^2}{c^4} - \frac{(2E/c)^2}{c^2} = 0.$$

Во втором случае энергия  $2E$ , а импульс нулевой. Следовательно

$$m^2 = \frac{(2E)^2}{c^4} = \frac{4E^2}{c^4}.$$

Другими словами, пара антипараллельных фотонов обладает ненулевой массой.

**Пример 3.** Движущаяся частица, масса которой (масса покоя)  $m_1$ , а кинетическая энергия  $T_1$ , сталкивается с неподвижной частицей массой  $m_2$ . После соударения образуется одна частица. Найти массу образовавшейся частицы.

Воспользуемся законом сохранения энергии и законом сохранения импульса

$$E_1 + E_2 = E,$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p},$$

где  $E$  и  $\mathbf{p}$  - энергия и импульс частицы, индексы 1 и 2 нумеруют сталкивающиеся частицы, а составная частица индексов лишена. Как известно, энергия частицы, ее масса (масса покоя) и импульс связаны соотношениями

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \tag{1}$$

$$p = \frac{vE}{c^2}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$E = mc^2 + T,$$

где  $T$  - кинетическая энергия. Для второй частицы

$$E_2 = m_2 c^2,$$

$$\mathbf{p}_2 = 0,$$

поэтому  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$  ( $p_1^2 = p^2$ ) и система уравнений (1)-(2) может быть переписана в виде

$$m_1 c^2 + T_1 + m_2 c^2 = E,$$

$$\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2.$$

Решение последней есть

$$m = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 2T_1 m_1 / c^2}.$$

## Литература для самостоятельной работы

1. Курс общей физики, И. В. Савельев, т. 1-3, Москва, Наука, 1988.
2. Курс физики, Т. И. Трофимова, Москва, Высшая школа, 1985.
3. Основы физики, Н. П. Калашников, М. А. Смондырев, т. 1-3, Москва, Дрофа, 2003.
4. Сборник задач по физике, под ред. С.М. Козела, Москва, Наука, 1990.
5. Сборник задач по физике, под ред. Б.Б. Буховцева, Москва, Наука, 1987.
6. Задачи по физике, ч. 1,2,3, А.Н.Долгов, С.Е. Муравьев, В.П. Протасов и др., Учебное пособие, Москва, изд-во МИФИ, 2004.
7. Задачник по физике, А.Г.Чертов, А.А.Воробьев, Москва, Высшая школа, 1988.

## Сборник заданий по физике

Ляшенко Валентин Иванович  
Максименко Владимир Викторович  
Пулькин Игорь Сергеевич  
Соловьев Игорь Алексеевич  
Галямов Булат Шайхиевич



Редакционно-издательский отдел ГУЗа  
Лицензия № 020484 от 02.02.1998 г.  
Подписано в печать 10.02.2006 г. Сдано в производство 15.04. 2007г.  
Формат 60 X 84/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 3,1.  
Уч.-изд. л. 1,1.  
Тираж 300 экз. Заказ №

Участок оперативной полиграфии ГУЗа.  
Москва, ул. Казакова, 15